Universität München
Department Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 2
02. 11. 2021

Übungen zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I"

1. Gegeben sei die Menge $G = \{a, b, c, d\}$. Ergänzen Sie die folgende Verknüpfungstabelle so, daß G mit ihr zu einer Gruppe wird.

∘	a	b	c	d
a				d
b		a		
c				
d				

   a) Wieviele Möglichkeiten gibt es? Welches Element ist das neutrale Element? Ist die Gruppe abelsch? Finden Sie das inverses Element zu jedem Element der Gruppe.

   b) Beweisen Sie durch Widerspruch daß in jeder Zeile/Spalte der Verknüpfungstabelle jedes Element genau einmal auftaucht.

2. **!!!!! BONUS Aufgabe !!!!!**
   Abgabe - *bis 12.00 Uhr, Dienstag, 02.11.2021.*
   Ergebnisse - *ab Mittwoch, 03.11.2021.*

   Überprüfen Sie ob die Menge $G = \{a^0, a^1, a^2, a^3\}$ mit der Verknüpfungsoperation

$$a^l \circ a^m = \begin{cases} a^{l+m}, & l+m < 4\,, \\ a^{l+m-4}, & l+m \geq 4 \end{cases}$$

   eine Gruppe bildet.

   Erstellen Sie eine Verknüpfungstabelle und begründen Sie Ihre Antwort (überzeugen Sie sich ob alle Gruppenaxiome erfüllt sind).

3. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen, und entscheiden Sie jeweils über Surjektivität, Injektivität, Bijektivität (mit Begründung). Wie lauten die Umkehrfunktionen im Falle von Bijektivität?

   a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ x \mapsto x^2$

   b) $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

   c) $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$

   d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(1-x^2)$

4. Stellen Sie die folgenden Mengen von Zahlen-Dupeln in einem Kartesischen Koordinatensystem graphisch dar. Welche der Mengen kann als Graph und damit als Darstellung einer Funktion bezeichnet werden?

   a) $\mathrm{D}_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid xy = 1\}$

   b) $\mathrm{D}_b = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x^2+y^2-1)y = 0\}$

   c) $\mathrm{D}_c = \{(x,y) \in]-1,+1[\times \mathbb{R}^+ \mid (x^2+y^2-1)y = 0\}$

   ($]-1,+1[:= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ - offenes Intervall)

Fakultative Aufgabe
Diese Aufgaben werden nicht in der Übung bearbeitet. Ihr Übungsleiter wird aber gern alle Fragen dazu beantworten.

F1. Gilt für zwei Elemente a und b einer Gruppe G mit der Verknüpfung $\circ$ die Gleichung

$$a = u \circ b \circ u^{-1}$$

mit einem weiteren Element u aus G, so gehören a und b definitionsgemäß einer *Konjugationsklasse* oder kurz *Klasse* an. Weisen Sie nach:

   a) Das Einselement e von G bildet eine Klasse für sich.

   b) Für abelsche Gruppen gilt: Jedes Element bildet eine Klasse für sich.

   c) Alle Klassen sind paarweise disjunkt, d.h. alle paarweisen Schnittmengen von Klassen sind leer. Mathematisch gesprochen erfüllen damit a und b eine sog. *Äquivalenzrelation.*