Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 2
02. 11. 2021

Musterlösung der Blatt 2 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Gegeben sei die Menge $G = \{a, b, c, d\}$. Ergänzen Sie die folgende Verknüpfungstabelle so, daß G mit ihr zu einer Gruppe wird.

∘	a	b	c	d
a				d
b		a		
c				
d				

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es? Welches Element ist das neutrale Element? Ist die Gruppe abelsch? Finden Sie das inverses Element zu jedem Element der Gruppe.

b) Beweisen Sie durch Widerspruch daß in jeder Zeile/Spalte der Verknüpfungstabelle jedes Element genau einmal auftaucht.

1. **Lösung**
Hinweis: Benutzen Sie die Gruppenaksiome und Kürzungsregeln um die Verknüpfungstabelle zu ergänzen:
$a \circ d = d \Rightarrow a$ ist ein neutrales Element;
$b \circ b = a \Rightarrow b$ ist ein inverses Element zu b;

$b \circ c \neq a \Leftarrow b$ ist kein inverses Element zu c;
$b \circ c \neq b \Leftarrow c$ ist kein neutrales Element;
$b \circ c \neq c \Leftarrow b$ ist kein neutrales Element;
$\Rightarrow b \circ c = d$;
....
....

a) Zwei Möglichkeiten:

1)

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	**a**	**b**
d	d	c	**b**	**a**

2)

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	**b**	**a**
d	d	c	**a**	**b**

Das neutrale Element ist ’a’.

Die Gruppe ist abelsch.

1)

Element	a	b	c	d
Inverses Element	a	b	c	d

2)

Element	a	b	c	d
Inverses Element	a	b	d	c

b)

$$\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$$

$$\begin{aligned} b \circ b &= a & c \circ b &= a \\ b \circ b \circ b^{-1} &= a \circ b^{-1} & c \circ b \circ b^{-1} &= a \circ b^{-1} \\ b &= a \circ b^{-1} & c &= a \circ b^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

2. **!!!!! BONUS Aufgabe !!!!!**

Überprüfen Sie ob die Menge $G = \{a^0, a^1, a^2, a^3\}$ mit der Verknüpfungsoperation

$$a^l \circ a^m = \begin{cases} a^{l+m}, & l+m < 4, \\ a^{l+m-4}, & l+m \geq 4 \end{cases}$$

eine Gruppe bildet.

Erstellen Sie eine Verknüpfungstabelle und begründen Sie Ihre Antwort (überzeugen Sie sich ob alle Gruppenaxiome erfüllt sind).

Łösung

$\circ$	a^0	a^1	a^2	a^3
a^0	a^0	a^1	a^2	a^3
a^1	a^1	a^2	a^3	a^0
a^2	a^2	a^3	a^0	a^1
a^3	a^3	a^0	a^1	a^2

1. Abgeschlossenheit:

Z.B.: $a^1 \in G$, $a^2 \in G$, $a^1 \circ a^2 = a^3 \in G$.

....
2. Es gilt das Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} a^1 \circ (a^2 \circ a^3) &= (a^1 \circ a^2) \circ a^3 \\ a^1 \circ a^1 &= a^3 \circ a^3 \\ a^2 &= a^2 \end{aligned}$$

....
3. Es existiert ein linksneutrales Element e:

a^0 ist neutrales Element:

$a^0 \circ a^1 = a^1$; $a^0 \circ a^2 = a^2$; $a^0 \circ a^3 = a^3$.

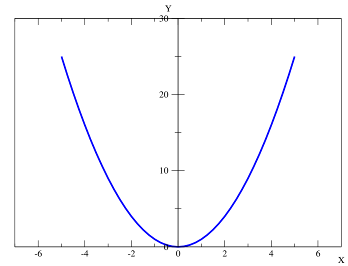
4. Es existiert zu jedem Element $a \in G$ ein linksinverses Element $a^{-1} \in G$ so dass gilt $a^{-1} \circ a = e$.
Aus Verknüpfungstabelle:

$a^0 \circ a^0 = a^0 \Longrightarrow a^0$ ist linksinverses Element zu sich selbst.
$a^1 \circ a^3 = a^0 \Longrightarrow a^1$ ist linksinverses Element zu a^3.
$a^2 \circ a^2 = a^0 \Longrightarrow a^2$ ist linksinverses Element zu sich selbst.
$a^3 \circ a^1 = a^0 \Longrightarrow a^3$ ist linksinverses Element zu a^1.

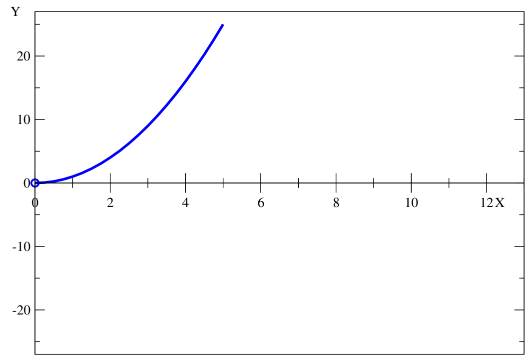
Die Gruppenaxiome sind erfüllt.

3. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen, und entscheiden Sie jeweils über Surjektivität, Injektivität, Bijektivität (mit Begründung). Wie lauten die Umkehrfunktionen im Falle von Bijektivität?
Lösung

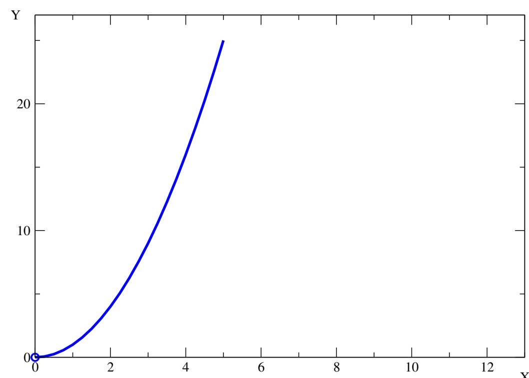
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$
Surjektiv



b) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
Injektiv

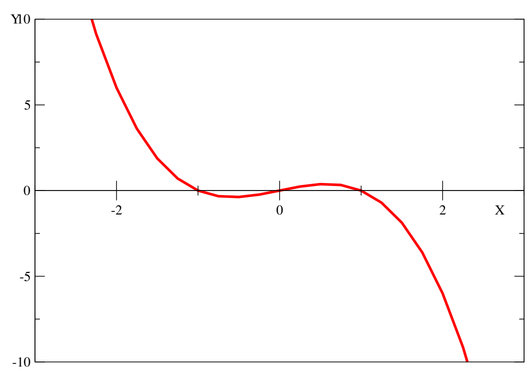


c) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$
Bijektiv
Umkehrfunktion:
$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \sqrt{x}$



d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(1 - x^2)$

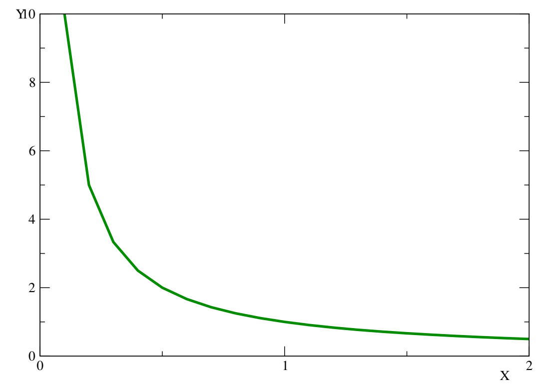
Surjektiv



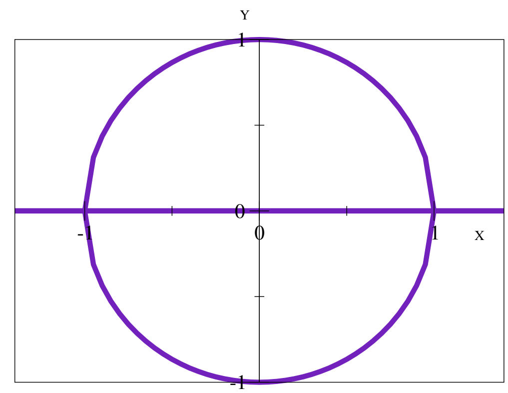
4. Stellen Sie die folgenden Mengen von Zahlen-Dupeln in einem Kartesischen Koordinatensystem graphisch dar. Welche der Mengen kann als Graph und damit als Darstellung einer Funktion bezeichnet werden?

Lösung

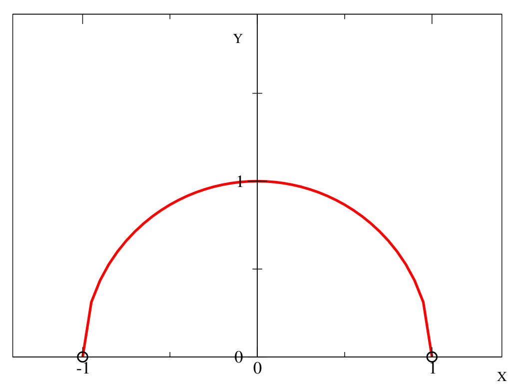
a) $\mathrm{D}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid xy = 1\}$
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ ,\ \ x \mapsto \dfrac{1}{x}$



b) $\mathrm{D}_b = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x^2 + y^2 - 1)y = 0\}$
Keine Darstellung einer Funktion.



c) $\mathrm{D}_c = \{(x, y) \in]-1, +1[\times \mathbb{R}^+ \mid (x^2 + y^2 - 1)y = 0\}$
$f :]-1, +1[\ , x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$



$( ]-1, +1[:= \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1\})$

Fakultative Aufgabe

F1. Gilt für zwei Elemente a und b einer Gruppe G mit der Verknüpfung $\circ$ die Gleichung

$$a = u \circ b \circ u^{-1}$$

mit einem weiteren Element u aus G, so gehören a und b definitionsgemäß einer *Konjugationsklasse* oder kurz *Klasse* an. Weisen Sie nach:

a) Das Einselement e von G bildet eine Klasse für sich.

b) Für abelsche Gruppen gilt: Jedes Element bildet eine Klasse für sich.

c) Alle Klassen sind paarweise disjunkt, d.h. alle paarweisen Schnittmengen von Klassen sind leer. Mathematisch gesprochen erfüllen damit a und b eine sog. *Äquivalenzrelation*.

Lösung

a)

$$e = u \circ e \circ u^{-1}$$

$$e = u \circ u^{-1}$$

$$e = e$$

b) Für abelsche Gruppen:

$$a \circ b = b \circ a$$

$$a \circ b \circ b^{-1} = b \circ a \circ b^{-1}$$

$$a \circ e = b \circ a \circ b^{-1}$$

$$a = b \circ a \circ b^{-1}$$

c) Beweis durch Widerspruch:

Seien A und B verschiedene Klassen der Gruppe G.

Sei $a \in A$ und $b \in B$.

Angenommen $c \in A$ und $c \in B$.

Dann folgt:

$$c = u \circ a \circ u^{-1} \;\; ; \;\; c = u_1 \circ b \circ u_1^{-1} \;\; ; \;\; u\,, u_1 \in G$$

$$u \circ a \circ u^{-1} = u_1 \circ b \circ u_1^{-1}$$

$$a \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u_1 \circ b \circ u_1^{-1}$$

$$a = u^{-1} \circ u_1 \circ b \circ u_1^{-1} \circ u$$

$$u^{-1} \circ u_1 = g \in G \; ; \; u_1^{-1} \circ u = g^{-1} \in G$$

$$a = g \circ b \circ g^{-1}$$

Das letztes Ausdruck ist in Widerspruch mit der Annahme, d.h. c kann nicht gleichzeitig in A und B liegen.