Universität München
Department Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 4
16. 11. 2021

Übungen zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. a) Überzeugen Sie sich davon, daß für eine komplexe Zahl z die Beziehung

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

gilt. Geben Sie einen entsprechenden Ausdruck für $\mathrm{Im}(z)$ an.

(2.0 Punkte)

b) Zeigen Sie weiterhin, daß $(z^*)^* = z$ und $z_1 z_2^* = (z_1^* z_2)^*$ gilt.

Benützen Sie die Zerlegung $z = x + iy$.

2. **!!!!! BONUS Aufgabe !!!!!**
Abgabe - *bis 12.00 Uhr, Dienstag, 16.11.2021.*
Ergebnisse - *ab Mittwoch, 17.11.2021.*

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3} i$$

$$z_3 = 6\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

.

a) Geben Sie z_1, z_2 und z_3 in Polarkoordinaten an (Eulersche Darstellung).

b) Berechnen Sie z_1^2, z_2^3 und $\frac{z_2}{z_3}$. Verwenden Sie zur Berechnung die Eulersche Darstellung.

c) Geben Sie von den komplexen Zahlen $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ und $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ jeweils Real- und Imaginärteil an und skizziren Sie die Zahlen in der komplexen (Gaußschen) Zahlenebene.

3. Berechnen Sie alle Lösungen von $z^2 = 4i$, $z \in \mathbb{C}$ durch Gleichsetzen von Real- und Imaginärteil.

Fakultative Aufgaben

Diese Aufgaben werden nicht in der Übung bearbeitet. Ihr Übungsleiter wird aber gern alle Fragen dazu beantworten.

F1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)),\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$$

wenn z in der Form $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ gegeben ist.

Hinweis:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\ \cos(\beta) + \cos(\alpha)\ \sin(\beta)\,;$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\ \cos(\beta) - \sin(\alpha)\ \sin(\beta) \qquad \forall\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ (Additionstheoreme).

Lösung

$\underline{n_0 = 1}$;

$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$;

$\underline{k \geq n_0}$;

$z^k = r^k(\cos(k\phi) + i\sin(k\phi))$;

$\underline{k+1}$;

$$\begin{aligned}
z^{k+1} &= z^k \cdot z = \\
&= r^k(\cos(k\phi) + i\sin(k\phi)) \cdot r(\cos\phi + i\sin\phi) = \\
&= r^{k+1}[\cos(k\phi)\cos\phi - \sin(k\phi)\sin\phi + i(\cos(k\phi)\sin\phi + \sin(k\phi)\cos\phi)] = \\
&= r^{k+1}[\cos(k\phi+\phi) + i\sin(k\phi+\phi)] = \\
&= r^{k+1}[\cos((k+1)\phi) + i\sin((k+1)\phi)]
\end{aligned}$$

F2. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 - 9 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Eulersche Darstellung. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $e^{2\pi ik} = 1$.

$$z^3 - 9 = 0\,, \qquad z^3 = 9$$

$$z = r \cdot e^{i\phi}\,, \quad \Rightarrow \quad z^3 = r^3 \cdot e^{i3\phi}\,; \qquad 9 = 9 \cdot e^{2\pi ik}$$

$$r^3 \cdot e^{i3\phi} = 9 \cdot e^{2\pi ik}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} r^3 = 9 & \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{9} \\ 3\phi = 2\pi k & \Rightarrow \quad \phi = \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$$

$$z = \sqrt[3]{9} \cdot e^{i\frac{2\pi k}{3}}, \quad k = 0, 1, 2$$