Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 4
16. 11. 2021

Musterlösung der Blatt 4 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. a) Überzeugen Sie sich davon, daß für eine komplexe Zahl z die Beziehung $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ gilt. Geben Sie einen entsprechenden Ausdruck für $\mathrm{Im}(z)$ an.

   a) **Lösung**

   $z = x + iy;$

   $z^* = x - iy;$

   $z + z^* = x + iy + x - iy = 2x = 2\mathrm{Re}(z);$

   $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$

   $z - z^* = x + iy - x + iy = 2iy = 2i\mathrm{Im}(z);$

   $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

   b) Zeigen Sie weiterhin, daß $(z^*)^* = z$ und $z_1 z_2^* = (z_1^* z_2)^*$ gilt.

   b) **Lösung**

   $(z^*)^* = (x - iy)^* = x + iy = z;$

   $z_1 z_2^* = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2);$

   $(z_1^* z_2)^* = ((x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2))^* =$

   $= ((x_1x_2 + y_1y_2) - i(y_1x_2 - x_1y_2))^* =$

   $= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2) = z_1 z_2^*.$

2. Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$
$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$$
$$z_3 = 6\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

a) Geben Sie z_1, z_2 und z_3 in Polarkoordinaten an (Eulersche Darstellung).

b) Berechnen Sie z_1^2, z_2^3 und $\frac{z_2}{z_3}$. Verwenden Sie zur Berechnung die Darstellung in Polarkoordinaten.

c) Geben Sie von den komplexen Zahlen $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ und $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ jeweils Real- und Imaginärteil an und skizziren Sie die Zahlen in der komplexen (Gaußschen) Zahlenebene.

Lösung:
Berechnung des Winkels ϕ mit Hilfe des Arkuskosinus ($z = x + iy$)

im Intervall $[-\pi, \pi]$

$$\phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|} & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{|z|} & \text{für } y < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } |z| = 0 \end{cases}$$

Im Intervall $[0, 2\pi]$:

$$\phi' = \begin{cases} \phi + 2\pi & \text{falls } \phi < 0 \\ \phi & \text{sonst} \end{cases}$$

a)

$$r_1 = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1\,; \quad \phi_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$
$$\rightarrow \quad z_1 = r_1\, e^{i\phi_1} = 1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$
$$r_2 = \sqrt{1+3} = 2\,; \quad \phi_2 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$
$$\rightarrow \quad z_2 = r_2\, e^{i\phi_2} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}.$$
$$r_3 = 6\,; \quad \phi_3 = \frac{5\pi}{6}$$
$$\rightarrow \quad z_3 = r_3\, e^{i\phi_3} = 6 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

b)

$$z_1^2 = 1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot 1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = 1 \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)} = 1 \cdot e^{i\frac{6\pi}{4}} = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -i\,;$$

$$z_2^3 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 8 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8 \cdot e^{i\pi} = 8 \cdot (\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -8\,;$$

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}{6 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{3\pi}{6}} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i\frac{1}{3}.$$

c)

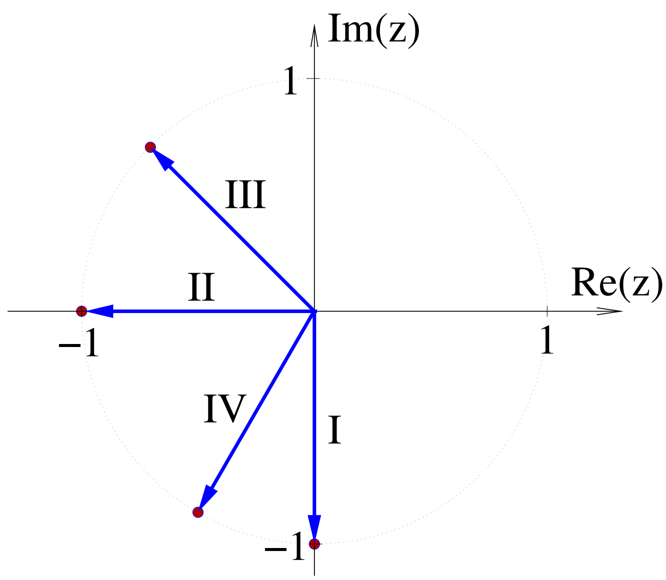
I $$z = e^{-i\frac{\pi}{2}} = 1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i\,; \qquad \mathrm{Re}(z) = 0\,;\ \ \mathrm{Im}(z) = -1$$

II $$z = e^{-i\pi} = 1\cdot(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1\,; \qquad \mathrm{Re}(z) = -1\,;\ \ \mathrm{Im}(z) = 0$$

III $$z = e^{i\frac{3\pi}{4}} = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\,; \qquad \mathrm{Re}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ \ \mathrm{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

IV $$z = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 1\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\,; \qquad \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}\,;\ \ \mathrm{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

r für alle Zahle ist 1.



3. Berechnen Sie alle Lösungen von $z^2 = 4i$, $z \in \mathbb{C}$ durch Gleichsetzen von Real- und Imaginärteil.

Lösung

$$z = a + ib\,; \quad z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 4i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & \Rightarrow \quad (a+b)(a-b) = 0 & \Rightarrow \quad a = \pm b \\ 2ab = 4 & \Rightarrow \quad ab = 2 > 0 & \Rightarrow \quad \text{nur} \quad a = b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a^2 = 2 \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{2} \\ &\Rightarrow \quad a_1 = +\sqrt{2} \quad b_1 = +\sqrt{2} \\ &\Rightarrow \quad a_2 = -\sqrt{2} \quad b_2 = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$