Universit”at M”unchen
Department Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 6
30. 11. 2021

”Ubungen zur Vorlesung ”‘Einf”uhrung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I”’

Achtung: Auf Grund der aktuellen Pandemie finden die Vorlesungen und Übungen **ab dem 29.11.2021 wieder NUR ONLINE** statt. Der Link zum Vorlesungs-Meeting ist nur fr eingeloggte Benutzer (auch standard Studenten-Zugang) ersichtlich. Nach Wunsch von sehr vielen Studierenden beginnt die **Online-Vorlesung bereits um 9 Uhr**. Es soll damit mehr Zeit zwischen dem Ende der Vorlesung und dem Beginn des Praktikum entstehen.

1. Finden Sie zwei reelle Zahlen a, b mit denen gilt
$a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0\,.$
Zeigen Sie die Gleichheit auch zeichnerisch.

2. **!!!!! BONUS Aufgabe !!!!!**
Abgabe - *bis 12.00 Uhr, Dienstag, 30.11.2021.*
Ergebnisse - *ab Mittwoch, 01.12.2021.*

   Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Molek”uls aus n=5 Atomen mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{r}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und Massen $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, $m_4 = 2$, m_5=8. Wohin verschiebt sich der Schwerpunkt wenn Sie Atom 1 durch eines mit $m_1 = 35$ substituieren?

3. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$ ($\vec{a}\,,\ \vec{e}\ \in\ R^3$).

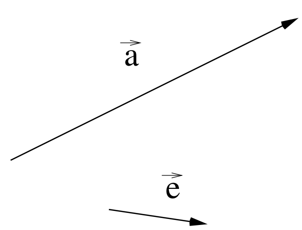


Abb.

   a) Beweisen Sie, dass gilt

$$\vec{a} = \vec{e}(\vec{a}\cdot\vec{e}) + \vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e}).$$

   b) Stellen Sie zeichnerisch dar und verifizieren Sie, dass dieser Ausdruck die Zerlegung des Vektors $\vec{a}$ in zwei Komponenten entlang und senkrecht zu $\vec{e}$ ist.

Fakultative Aufgaben *Diese Aufgaben werden nicht in der Übung bearbeitet. Ihr Übungsleiter wird aber gern alle Fragen dazu beantworten.*

F1. Eine Gerade laufe durch die Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Finden Sie zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, sodaß jeder Punkt der Geraden durch

$$\vec{r}_\lambda = \vec{a} + \lambda \vec{b}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

repräsentiert wird.

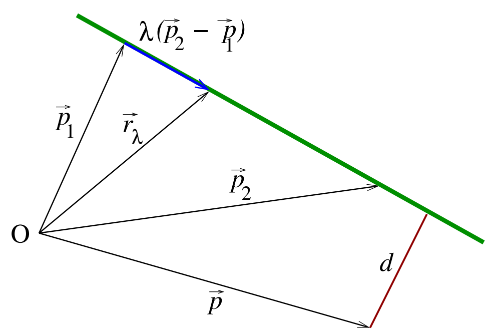
b) Wie groß ist der Abstand des Punktes $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ von der Geraden?

Lösung

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$



a)

$\vec{r}_\lambda = \vec{p}_1 + \lambda(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \equiv \vec{a} + \lambda \vec{b} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = \vec{p}_1; \quad \vec{b} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$

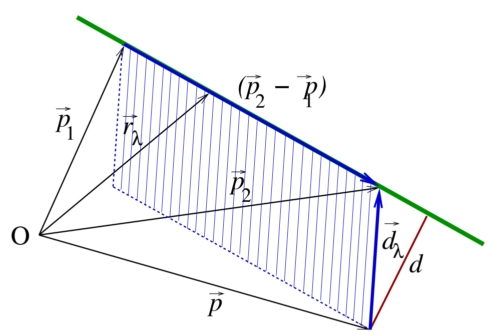
b)

$\boxed{d \cdot |\vec{b}| = |\vec{d}_\lambda \times \vec{b}|}$

$\vec{b} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$

$\vec{d}_\lambda = (\vec{p}_2 - \vec{p})$

$d = \dfrac{|(\vec{p}_2 - \vec{p}) \times (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)|}{|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)|}$



$$(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad (\vec{p}_2 - \vec{p}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$|(\vec{p}_2 - \vec{p}) \times (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)| = \left| \begin{pmatrix} 12 - 15 \\ -10 + 15 \\ -15 + 8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{83}$$

$$|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{22}; \qquad \boxed{d = \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{83}{22}}}$$

F2. a) Stellen Sie die Vektorgleichung f"ur die Ortsvektoren aller Punkte des $\mathbb{R}^3$ auf, die von zwei vorgegebenen Punkten mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich weit entfernt sind.

b) Zeigen Sie, da"s das Ergebnis aus a) eine Ebene darstellt, indem Sie diese Gleichung auf die *Hessesche Normalform* bringen.

c) Interpretieren Sie das Ergebnis aus b) graphisch.