Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 6
30. 11. 2021

Musterlösung der Blatt 6 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Finden Sie zwei reelle Zahlen a, b mit denen gilt

   $a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0\,.$

   Zeigen Sie die Gleichheit auch zeichnerisch.

   Lösung

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2a+0+6 \\ 0-b-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

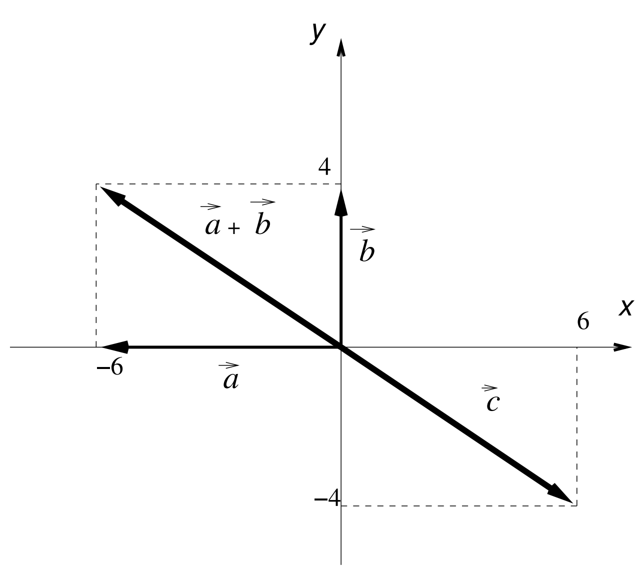
$$\begin{pmatrix} 2a+6 \\ -b-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a+6=0 & \Rightarrow \quad a=-3 \\ -b-4=0 & \Rightarrow \quad b=-4 \end{cases}$$

$$(-3)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0\,.$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0\,.$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$



2. Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Moleküls aus n=5 Atomen mit den Ortsvektoren

$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{r_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{r_5} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

und Massen $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, $m_4 = 2$, $m_5 = 8$.

Wohin verschiebt sich der Schwerpunkt wenn Sie Atom 1 durch eines mit $m_1 = 35$ substituieren?

Lösung

Schwerpunkt: $\vec{r}_{Sp} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$.

$$M = \sum_{i=1}^{5} m_i = 1 + 2 + 1 + 2 + 8 = 14$$

$$x_{Sp} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{5} m_i x_i = \frac{1}{14}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 8 \cdot 4) = 4$$

$$y_{Sp} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{5} m_i y_i = \frac{1}{14}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 8 \cdot 4) = 4\frac{1}{7}$$

$$z_{Sp} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{5} m_i z_i = \frac{1}{14}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 8 \cdot 4) = 4$$

$\vec{r}_{Sp} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4\frac{1}{7} \\ 4 \end{pmatrix}$;

Falls $m_1 = 35 \Rightarrow M = 48$

$\Rightarrow x_{Sp} = 3\frac{7}{24}$, $y_{Sp} = 3\frac{8}{24}$, $z_{Sp} = 3\frac{7}{24} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{Sp} = \begin{pmatrix} 3\frac{7}{24} \\ 3\frac{1}{3} \\ 3\frac{7}{24} \end{pmatrix}$

3. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$ ($\vec{a}, \ \vec{e} \ \in \ R^3$).

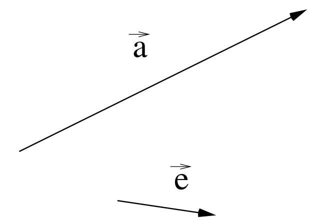


Abb.

a) Beweisen Sie, dass gilt

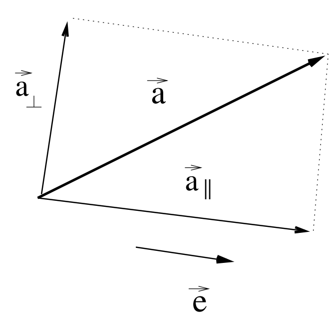
$$\vec{a} = \vec{e}\,(\vec{a}\cdot\vec{e}) + \vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e}).$$

b) Stellen Sie zeichnerisch dar und verifizieren Sie, dass dieser Ausdruck die Zerlegung des Vektors $\vec{a}$ in zwei Komponenten entlang und senkrecht zu $\vec{e}$ ist.

Lösung

a) $\vec{a} = \vec{e}\,(\vec{a}\cdot\vec{e}) + \vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e}) \quad = \vec{e}\,(\vec{a}\cdot\vec{e}) + [\vec{a}\,(\vec{e}\cdot\vec{e}) - \vec{e}\,(\vec{e}\cdot\vec{a})] \quad = \vec{e}\,(\vec{e}\cdot\vec{a}) - \vec{e}\,(\vec{e}\cdot\vec{a}) + \vec{a}\,(\vec{e}\cdot\vec{e}) = \vec{a}.$

b) Stellen Sie zeichnerisch dar und verifizieren Sie, dass dieser Ausdruck die Zerlegung des Vektors $\vec{a}$ in zwei Komponenten entlang und senkrecht zu $\vec{e}$ ist.



$\vec{a}_\parallel = |\vec{a}_\parallel|\vec{e};$
$|\vec{a}_\parallel| = |\vec{a}|\cos(\angle(\vec{a}\vec{e}));$
$\vec{a}\cdot\vec{e} = |\vec{a}||\vec{e}|\cos(\angle(\vec{a}\vec{e})) = |\vec{a}|\cos(\angle(\vec{a}\vec{e}));$
$\Rightarrow \quad \vec{a}_\parallel = (\vec{a}\cdot\vec{e})\,\vec{e}$

Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}(\vec{e}\,(\vec{a}\cdot\vec{e}))\cdot(\vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e})) &= (\vec{e}\,(\vec{a}\cdot\vec{e}))\cdot(\vec{a}\,(\vec{e}\cdot\vec{e}) - \vec{e}\,(\vec{e}\cdot\vec{a}))\\ &= (\vec{e}\,(\vec{a}\cdot\vec{e}))\cdot(\vec{a}\,(\vec{e}\cdot\vec{e})) - (\vec{e}\,(\vec{a}\cdot\vec{e}))\cdot(\vec{e}\,(\vec{e}\cdot\vec{a}))\\ &= (\vec{a}\cdot\vec{e})(\vec{e}\cdot\vec{e}))(\vec{e}\cdot\vec{a}) - (\vec{a}\cdot\vec{e})(\vec{e}\cdot\vec{a})(\vec{e}\cdot\vec{e}) = 0;\end{aligned}$$

Vektor $\vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e})$ ist senkrecht zu $\vec{e}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{e})$;

$|\vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e})| = |\vec{e}||\vec{a}\times\vec{e}|\sin(\angle(\vec{e}\,(\vec{a}\times\vec{e}))); \quad \angle\,(\vec{e}\,(\vec{a}\times\vec{e})) = \dfrac{\pi}{2}; \Rightarrow \sin\,(\angle\,(\vec{e}\,(\vec{a}\times\vec{e}))) = 1;$

$|\vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e})| = |\vec{e}||\vec{a}\times\vec{e}| = |\vec{e}||\vec{a}||\vec{e}|\sin(\angle(\vec{a}\vec{e})) = |\vec{a}|\sin(\angle(\vec{a}\vec{e})) = |\vec{a}_\perp|.$

$\vec{a} = \vec{e}\,(\vec{a}\cdot\vec{e}) + \vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e}) = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp.$

F2. a) Stellen Sie die Vektorgleichung für die Ortsvektoren aller Punkte des $\mathbb{R}^3$ auf, die von zwei vorgegebenen Punkten mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich weit entfernt sind.

b) Zeigen Sie, daß das Ergebnis aus a) eine Ebene darstellt, indem Sie diese Gleichung auf die *Hessesche Normalform* bringen.

c) Interpretieren Sie das Ergebnis aus b) graphisch.

Lösung

a)

$$|\vec{r}-\vec{a}| = |\vec{r}-\vec{b}|$$
$$(\vec{r}-\vec{a})^2 = (\vec{r}-\vec{b})^2$$
$$(\vec{r})^2 - 2\vec{r}\vec{a} + (\vec{a})^2 = (\vec{r})^2 - 2\vec{r}\vec{b} + (\vec{b})^2$$
$$2\vec{r}(\vec{b}-\vec{a}) = (\vec{b})^2 - (\vec{a})^2$$

b) $\boxed{\textit{Hessesche Normalform } \hat{n}\cdot\vec{r} = d}$

$$\vec{r}(\vec{b}-\vec{a}) = \frac{(\vec{b})^2 - (\vec{a})^2}{2}$$
$$\vec{r}\,\frac{(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{b}-\vec{a}|} = \frac{(\vec{b})^2 - (\vec{a})^2}{2|\vec{b}-\vec{a}|}$$
$$\hat{n} = \frac{(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{b}-\vec{a}|}; \qquad d = \frac{(\vec{b})^2 - (\vec{a})^2}{2|\vec{b}-\vec{a}|}$$

c)