Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 8
14. 12. 2021

Musterlösung der Blatt 8 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie $(AC)B$, $A(CB)$:

   Lösung

   $$AC = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+35 & 2 & 3+14 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3+10 & 6 & 9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 2 & 17 \\ 2 & 4 & 6 \\ 13 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

   $$(AC)B = \begin{pmatrix} 36 & 2 & 17 \\ 2 & 4 & 6 \\ 13 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 72+2+34 & 2+17 \\ 2 & 4+4+12 & 4+6 \\ 13 & 26+6+26 & 6+13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 108 & 19 \\ 2 & 20 & 10 \\ 13 & 58 & 19 \end{pmatrix}$$

   $$CB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2+6 & 2+3 \\ 5 & 10+4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$A(CB) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 5 & 14 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+35 & 10+98 & 5+14 \\ 2 & 20 & 10 \\ 3+10 & 30+28 & 15+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 108 & 19 \\ 2 & 20 & 10 \\ 13 & 58 & 19 \end{pmatrix}$$

2. **!!!!! BONUS Aufgabe !!!!!**
Abgabe - *bis 12.00 Uhr, Dienstag, 14.12.2021.*
Ergebnisse - *ab Mittwoch, 15.12.2021.*

Die spezifische Leitfähigkeit eines Materials werde durch den Tensor ($\hat{=}$ Matrix) der Gestalt

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}$ und $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ beschrieben. Welche Stromdichte $\vec{j}$ ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ für eine elektrische Feldstärke $\vec{E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ spannen ein Rechteck mit der (orientierten) Fläche $\vec{A} = \vec{a} \times \vec{b}$ auf. Welcher Strom $I = \vec{j} \cdot \vec{A}$ tritt durch dessen Fläche?

Sind $\vec{j}$ und $\vec{E}$ parallel?

Lösung

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sigma_{xx} + 2\sigma_{xy} \\ -5\sigma_{xy} + 2\sigma_{xx} \\ 4\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

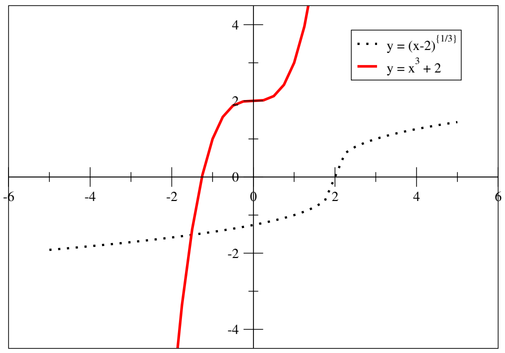
$$I = \vec{j} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} 5\sigma_{xx} + 2\sigma_{xy} \\ -5\sigma_{xy} + 2\sigma_{xx} \\ 4\sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = -4(5\sigma_{xx} + 2\sigma_{xy}) + 32\sigma_{zz} = -20\sigma_{xx} - 8\sigma_{xy} + 32\sigma_{zz}$$

$\vec{j}$ und $\vec{E}$ sind nicht parallel?

3. Bestimmen Sie Symmetrie, Periodizität und skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktionen. Untersuchen Sie die Funktionen außerdem auf Bijektivität. Falls diese nicht gegeben ist schränken Sie Definitions- bzw. Wertebereich soweit ein, bis Bijektivität erreicht ist. Bestimmen Sie dann die Umkehrfunktionen.

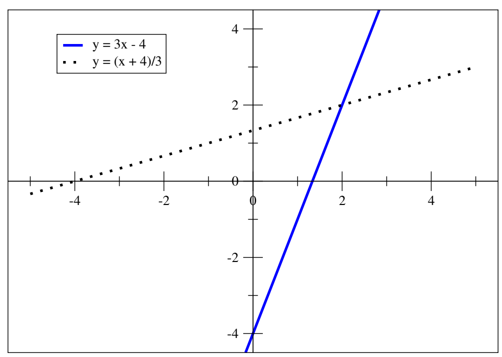
   a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3+2$ b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x-4$ c) $f\colon \mathbb{R} \to (-\infty,1],\ x \mapsto 1-x^2$
   d) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\cup\{0\},\ x \mapsto |x|$

Lösung



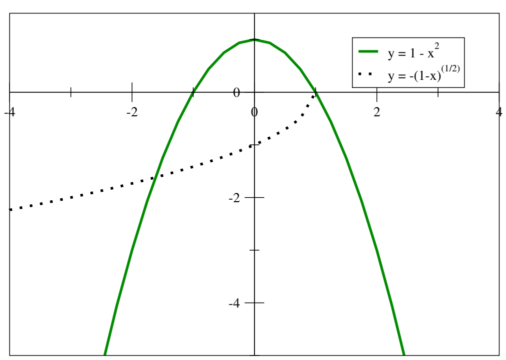
a)
Unsymmetrisch
Unperiodisch

Bijektive
Umkehrfunktion:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = \sqrt[3]{x-2}.$



b)
Unsymmetrisch
Unperiodisch

Bijektive
Umkehrfunktion:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = \dfrac{x+4}{3}.$

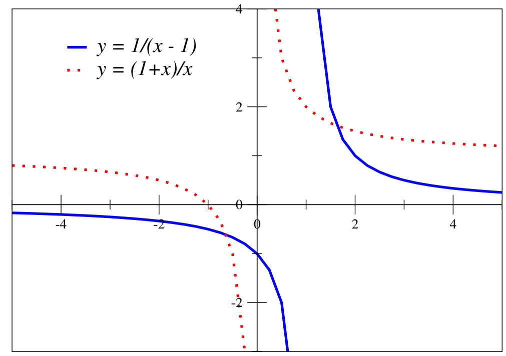


c)
Symmetrisch
Unperiodisch

Surjektive
Bijektive für: 1) $x \geq 0,\ y \leq 1$
oder 2) $x \leq 0,\ y \leq 1$
Umkehrfunktionen:
1) $f : (-\infty\,,1] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,, y = \sqrt{1-x};$
2) $f : (-\infty\,,1] \to \mathbb{R}^- \cup \{0\}\,, y = -\sqrt{1-x}.$

d)
Unsymmetrisch
Unperiodisch

Bijektive
Umkehrfunktion:
$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}\,,\ y = \dfrac{1+x}{x}$



e)
Symmetrisch
Unperiodisch

Surjektive
Bijektive für: 1) $x \geq 0$ oder 2) $x \leq 0$
Umkehrfunktionen:
1) $f : \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}\,, y = x;$
2) $f : \mathbb{R}^{-} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}\,, y = -x.$