Universität München
Department Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 11
18. 01. 2022

Übungen zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Gegeben sei die folgende Gleichung:

$$\left(p + \frac{3}{V^2}\right)(3V - 1) = 8T \qquad (T > 0)$$

   a) Betrachten Sie p als Funktion von V bei konstantem T und bringen Sie die Gleichung auf die Normalform einer gebrochen rationalen Funktion $p = p(V)$.

   b) Bestimmen Sie maximalen Definitionsbereich, Unstetigkeitsstellen, Verhalten für $V \to \infty$, Beschränktheit und Nullstellen von $p(V)$. Geben sie die Wertebereiche für T an, für die 0,1 bzw. 2 Nullstellen auftreten.

   Bemerkung: Es handelt sich um die *Van der Waalssche Zustandsgleichung* für reale Gase in reduzierten Einheiten (p: Druck, V: Volumen, T: Temperatur). Bei den Funktionen $p(V)$ handelt es sich also um Isothermen.

2. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a)	$\ln a + \ln b$	b)	$\lg 100$	c)	$10 \lg 10$
d)	$10^{\lg 10}$	e)	$(\lg 10)^{10}$	f)	$(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^{-4} \cdot (\frac{1}{2})^0$
g)	$(\sqrt{2})^{1/2}$	h)	3^{-3}	i)	$27^{1/3}$
j)	$10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2$	k)	$e^{\ln e}$	l)	$\ln(e \cdot e^4)$

3. !!!!! BONUS Aufgabe !!!!!
   Abgabe - *bis 12.00 Uhr, Dienstag, 18.01.2022.*

   Die Eulersche Beziehung lautet
   $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)\,, \quad (i^2 = -1)$ wobei $x \in \mathbb{R}$.

   a) Geben Sie einen entsprechenden Ausdruck für e^{-ix} an. Benutzen Sie beide Ausdrücke um $\cos x$ und $\sin x$ nur durch die $e-$Funktion auszudrücken.

   b) Benützen Sie die Eulersche Beziehung $e^{ix} = \cos\, x + i\, \sin\, x (x \in \mathbb{R})$ **(nicht die Ausdrücke für $\cos x$ und $\sin x$ durch die $e-$Funktion)** um die Gültigkeit der folgenden Beziehungen zu zeigen:

$$\sin(2x) = 2 \sin\, x \cos\, x\,, \qquad \cos(2x) = (\cos\, x)^2 - (\sin\, x)^2$$

4. Benutzen Sie die Def. von sin und cos mittels des Einheitskreises sowie den Satz von Pythagoras um $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für 0, $\pi/6$, $\pi/4$ und $\pi/3$ zu bestimmen.

5. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so um, daß keine trigonometrischen Funktion mehr vorhanden sind!
$$\cos(\arcsin x)$$

FAKULTATIVE Aufgaben

F1. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(t) = e^{-at}\cos(bt) \quad (a, b > 0)$. Ist die Funktion periodisch? (Die Funktion beschreibt den Free Induction Decay (FID), z.B. in der NMR)

F2. Geben Sie, ausgehend von den Additionstheoremen für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, Ausdrücke für:

a) $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$

b) $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ an.

c) Benutzen Sie die Ergebnisse um den Zusammenhang
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$
zu zeigen.

F3. Zeigen Sie, daß für die Umkehrfunktion arsinh (Areasinus Hyperbolicus) des $\sinh = \frac{1}{2}\left(e^{+x} - e^{-x}\right)$ gilt
$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,.$$
Lösen Sie dazu zunächst die Gleichung $y = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})$ mit $a = e^x$ und $y = \sinh(x)$ nach a auf. (Stimmt diese Gleichung mit der Definitionsgleichung des sinh überein?) Wie lautet die entsprechende Formel für $\operatorname{arcosh}(x)$?