Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 9
21. 12. 2021

Musterlösung der Blatt 9 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Bilden Sie die Verkettung der Funktionen f und g, $f \circ g$ für:

a) $f\colon D(f) \to W(f)\,,\; x \mapsto x^3 - 3x - 1\;;\quad g\colon D(g) \to W(g)\,,\; x \mapsto x^2 + 1$

Lösung

$$\mathbf{D(f \circ g) = \{x | x \in D(g) \wedge g(x) \in D(f)\}}$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2+1)^3 - 3(x^2+1) - 1 = x^6 + 3x^4 - 3;$

$g :\ \mathbb{R} \to [1\ ,\ \infty[;$ $\qquad f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R};$

$f \circ g :\ \mathbb{R} \to\ [-3\,,\infty[;$

b) $f\colon D(f) \to W(f)\,,\; x \mapsto \sqrt{x-1}\;;\quad g\colon D(g) \to W(g)\,,\; x \mapsto 1 - x^2$

Lösung

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(1-x^2) - 1} = \sqrt{-x^2};$

$g :\ \mathbb{R} \to]-\infty\ ,\ 1];$ $\qquad f :\ [1\,,\infty[\to \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$

Nur $g(0) = 1 \in D(f)$

$f \circ g :\ \{0\}\ \to\ \{0\};$

c) $f\colon D(f) \to W(f)\,,\; x \mapsto \sqrt{x}\;;\quad g\colon D(g) \to W(g)\,,\; x \mapsto x^2$

Lösung

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|;$

$g :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$ $\qquad f :\ \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$

$f \circ g :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$

2. Stellen Sie die folgenden Funktionen als Verkettung möglichst vieler elementarer Funktionen dar und geben Sie deren Definitions– und Wertebereiche jeweils zusammenpassend an.

   a) $f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]\,,\ x \mapsto [\cos(x^3+1)]^3$

      Lösung
      $g: \mathbb{R} \ \to\ \mathbb{R}\,,\ \ x \mapsto x^3+1;$
      $q: \mathbb{R} \ \to\ [-1\,,1]\,,\ \ x \mapsto \cos\, x;$
      $h: \mathbb{R} \ \to\ \mathbb{R}\,,\ \ x \mapsto x^3.$

      $(h \circ q \circ g)(x) = h(q(g(x))) : \mathbb{R} \to [-1,1]$

   b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [-1,1]\,,\ \ x \mapsto \cos(\ln x^2)$

      Lösung
      $g: \mathbb{R} \ \to\ \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,,\ \ x \mapsto x^2;$
      $q: \mathbb{R}^+ \ \to\ \mathbb{R}\,,\ \ x \mapsto \ln\, x;$
      $h: \mathbb{R} \ \to\ [-1\,,1]\,,\ \ x \mapsto \cos\, x.$

      $(h \circ q \circ g)(x) = h(q(g(x))) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [-1,1]$

3. Suchen Sie zu folgenden Zahlenfolgen eine Gesetzmäßigkeit (*Berechnungsvorschrift für das allgemeine Glied* a_n). Überprüfen Sie die Folgen auf Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:
(Falls kein Grenzwert existiert – versuchen Sie eine konvergente Teilfolge zu finden.)

   a) $\frac{9}{4}, \frac{7}{9}, \frac{5}{16}, \frac{3}{25}, \frac{1}{36}, \dots$

   Lösung

   $$a_n = \frac{11-2n}{(n+1)^2} \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

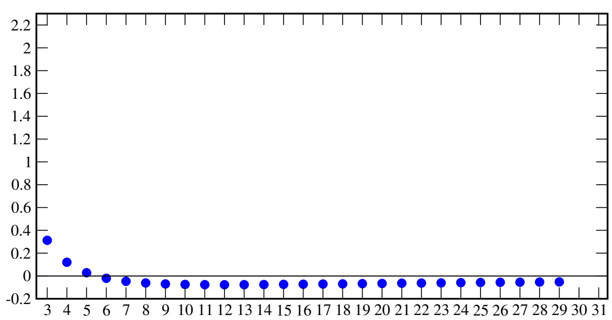
   $a_{n+1} - a_n = \frac{2n^2-20n-35}{(n+2)^2(n+1)^2}$

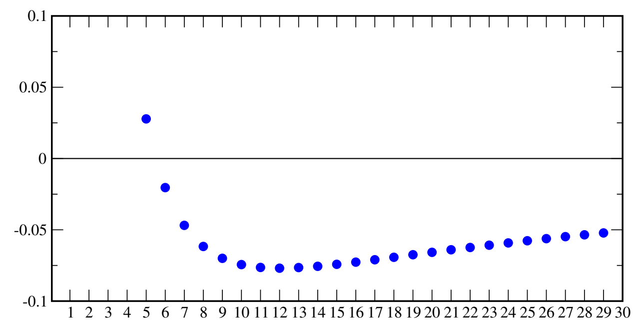
   monoton fallend für $n < 12$; $(a_{n+1} - a_n < 0)$

   monoton wachsend für $n \geq 12$; $(a_{n+1} - a_n > 0)$

   beschränkt; für $n \geq 12 \qquad -\frac{1}{13} \leq a_n \leq 0$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{11-2n}{(n+1)^2} = \frac{n^2(\frac{11}{n^2} - \frac{2}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = 0.$$





b) 1, -2, $\frac{1}{2}$, -3, $\frac{1}{4}$, -4, $\frac{1}{8}$, -5, $\frac{1}{16}$, ...

Lösung

$a_n = \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \left(\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right) - \dfrac{n+2}{2} \cdot \left(\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}\right);$

nicht monoton fallend(wachsend); nicht beschränkt; nicht konvergent

Sei $n_k = 1, 3, 5, 7, \ldots;$

dann Teilfolge:

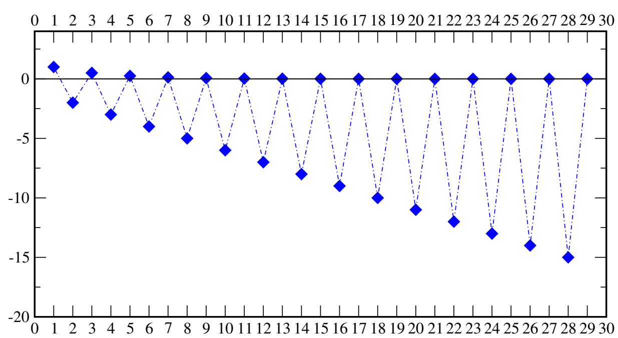
$\{a_{n_k}\}$ mit $a_{n_k} = \dfrac{1}{2^{\frac{n_k-1}{2}}}$

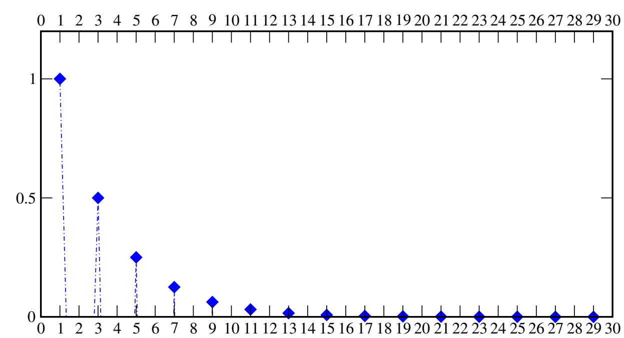
monoton fallend; $\quad a_{n_k+2} - a_{n_k} = -\dfrac{1}{2^{\frac{n_k+1}{2}}} < 0$ für alle $n_k = 1, 3, 5, ...$

$0 \leq a_{n_k} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad$ beschränkt

und konvergent

$\lim_{n_k \to \infty} \dfrac{1}{2^{\frac{n_k-1}{2}}} = 0.$





c) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots$

Lösung

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots \rightarrow 2^{\frac{1}{2}},\ 2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}},\ 2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{8}},\ \ldots \rightarrow 2^{\frac{1}{2}},\ 2^{\frac{3}{4}},\ 2^{\frac{7}{8}},\ \ldots \rightarrow 2^{1-\frac{1}{2}},\ 2^{1-\frac{1}{4}},\ 2^{1-\frac{1}{8}},\ \ldots$$

$a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$; für $n = 1, 2, ...$

monoton wachsend; $\quad a_{n+1} - a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}\left(\sqrt{2^{\frac{1}{2^n}}} - 1\right) > 0$ für $n = 1, 2, ...$

beschränkt $\sqrt{2} \leq a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = \dfrac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}} \leq 2$
und konvergent

$\lim_{n\to\infty}\ 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2.$