Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 11
18. 01. 2022

Musterlösung der Blatt 11 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Gegeben sei die folgende Gleichung:

$$\left(p + \frac{3}{V^2}\right)(3V - 1) = 8T \qquad (T > 0)$$

   a) Betrachten Sie p als Funktion von V bei konstantem T und bringen Sie die Gleichung auf die Normalform einer gebrochen rationalen Funktion $p = p(V)$.

   b) Bestimmen Sie maximalen Definitionsbereich, Unstetigkeitsstellen, Verhalten für $V \to \infty$, Beschränktheit und Nullstellen von $p(V)$. Geben sie die Wertebereiche für T an, für die 0,1 bzw. 2 Nullstellen auftreten.

Bemerkung: Es handelt sich um die *Van der Waalssche Zustandsgleichung* für reale Gase in reduzierten Einheiten (p: Druck, V: Volumen, T: Temperatur). Bei den Funktionen $p(V)$ handelt es sich also um Isothermen.

Lösung

a) $p = p(V) = \dfrac{8T}{(3V-1)} - \dfrac{3}{V^2}$;

$$p(V) = \frac{8TV^2 - 9V + 3}{V^2(3V-1)};$$

b) Definitionsbereich – $D : \mathbb{R} \setminus \{0\,, \frac{1}{3}\}$;

Unstetigkeitsstellen

$V \to 0+0\,,\ p \to -\infty$, $V \to 0-0\,,\ p \to -\infty$,

$V \to \frac{1}{3}+0\,,\ p \to +\infty$, $V \to \frac{1}{3}-0\,,\ p \to -\infty$;

$$\lim_{V\to\infty} \frac{8TV^2 - 9V + 3}{V^2(3V-1)} = \lim_{V\to\infty} \frac{8T - \frac{9}{V} + \frac{3}{V^2}}{(3V-1)} = 0\,;$$

Beschränktheit: $-\infty \to \infty$;

Nullstellen:

$8TV^2 - 9V + 3 = 0$; $V \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$;

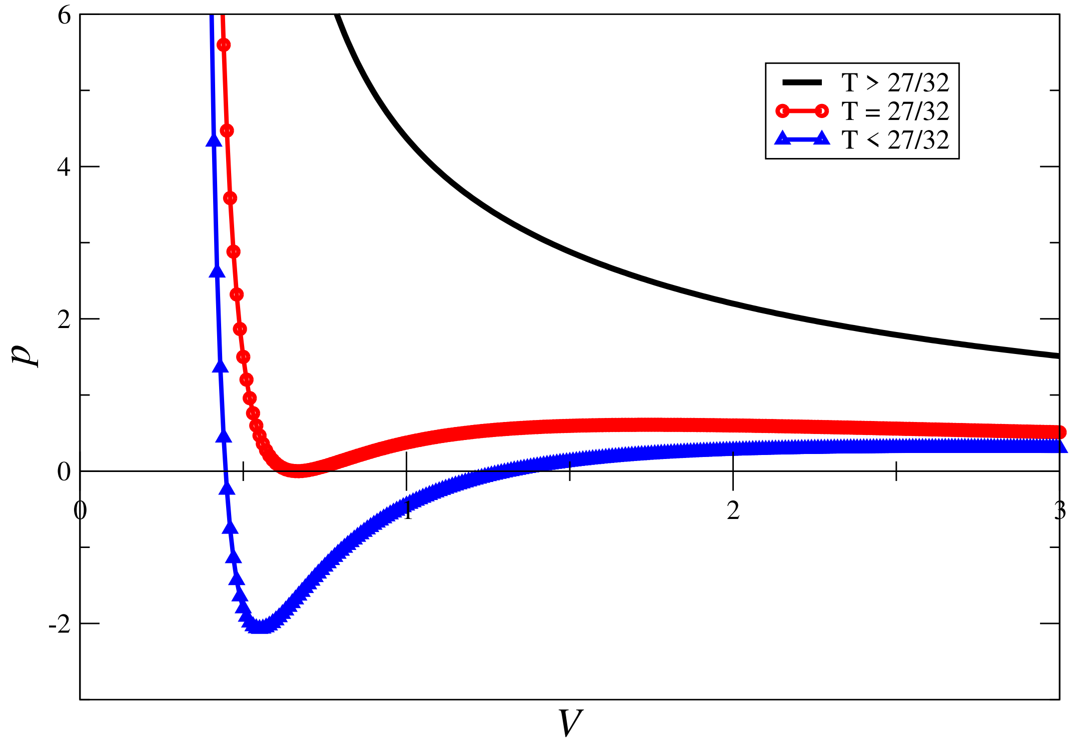
$$V_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 96T}}{16T};$$

0 Nullstellen: $81 - 96T < 0\,,\ \Rightarrow\ T > \dfrac{27}{32}$;

1 Nullstelle: $T = \dfrac{27}{32}$;

2 Nullstellen: $T < \dfrac{27}{32}$;

$$p(V) = (8TV^2 - 9V + 3)/V^2(3V - 1)$$



2. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\ln a + \ln b$	b) $\lg 100$	c) $10 \lg 10$
d) $10^{\lg 10}$	e) $(\lg 10)^{10}$	f) $(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^{-4} \cdot (\frac{1}{2})^0$
g) $(\sqrt{2})^{1/2}$	h) 3^{-3}	i) $27^{1/3}$
j) $10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2$	k) $e^{\ln e}$	l) $\ln(e \cdot e^4)$

Lösung

a) $\ln ab$	b) 2	c) 10
d) 10	e) 1	f) $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$
g) $\sqrt[4]{2}$	h) $\frac{1}{27}$	i) 3
j) 100	k) e	l) $5 \ln e = 5$

3. Die Eulersche Beziehung lautet
$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)\,, \qquad (i = \sqrt{-1})$
wobei $x \in \mathbb{R}$.
a) Geben Sie einen entsprechenden Ausdruck für e^{-ix} an. Benutzen Sie beide Ausdrücke um $\cos x$ und $\sin x$ nur durch die $e-$Funktion auszudrücken.
b) Benützen Sie die Eulersche Beziehung $e^{ix} = \cos\, x + i\, \sin\, x (x \in \mathbb{R})$ um die Gültigkeit der folgenden Beziehungen zu zeigen:

$$\sin(2x) = 2\sin\, x\cos\, x\,, \qquad \cos(2x) = (\cos\, x)^2 - (\sin\, x)^2$$

Lösung

a)

$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x);$

$e^{ix} + e^{-ix} = \cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x) = 2\cos(x);$

$\cos\, x = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix});$

$e^{ix} - e^{-ix} = (\cos(x) + i\sin(x)) - (\cos(x) - i\sin(x)) = 2i\sin(x);$

$\sin\, x = \dfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix});$

b)

$$\begin{gathered} e^{i2x} = \cos(2x) + i\, \sin(2x) \\ e^{i2x} = e^{ix} \cdot e^{ix} = (\cos\, x + i\, \sin\, x)(\cos\, x + i\, \sin\, x) \\ = \cos\, x\, \cos\, x + i\, \sin\, x\, \cos\, x + i\, \sin\, x\, \cos\, x + i^2 \sin\, x\, \sin\, x \\ = (\cos^2 x - \sin^2 x) + i\, 2\, \sin\, x\, \cos\, x \end{gathered}$$

Zwei komplexe Zahlen sind nur dann einander gleich, wenn ihre Real- und Imaginrteile einander gleich sind.

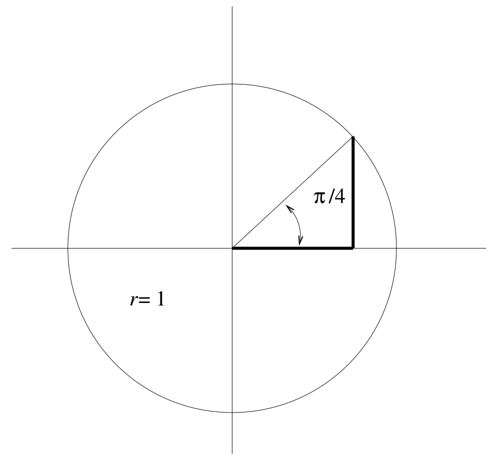
$$\cos(2x) + i\, \sin(2x) = (\cos^2 x - \sin^2 x) + i\, 2\, \sin\, x\, \cos\, x$$

$$\Rightarrow \qquad \cos(2x) = (\cos\, x)^2 - (\sin\, x)^2 \qquad \sin(2x) = 2\sin\, x\cos\, x\,.$$

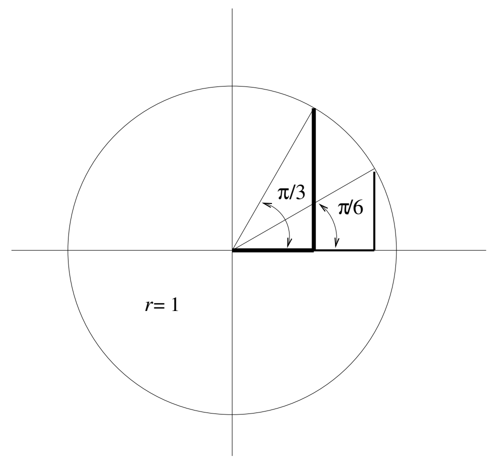
4. Benutzen Sie die Def. von sin und cos mittels des Einheitskreises sowie den Satz von Pythagoras um $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für 0, $\pi/6$, $\pi/4$ und $\pi/3$ zu bestimmen.

Lösung

$\cos 0 = 1\,;\ \sin 0 = 0;$



$\sin \pi/4 = \cos \pi/4;$
$\sin^2 \pi/4 + \cos^2 \pi/4 = 1;$
$2 \sin^2 \pi/4 = 1;$
$\Rightarrow \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \pi/4;$



$\cos \pi/6 = \sin \pi/3 = 2 \cos \pi/6 \sin \pi/6\,;$
$\Rightarrow\ 1 = 2 \sin \pi/6\,;\ \sin \pi/6 = \frac{1}{2};$

$\cos \pi/3 = \sin \pi/6 = \frac{1}{2};$

$\sin^2 \pi/6 + \cos^2 \pi/6 = 1\,;\ \Rightarrow\ \cos \pi/6 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$\sin \pi/3 = \cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2};$

5. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so um, daß keine trigonometrischen Funktion mehr vorhanden sind!

$$\cos(\arcsin x)$$

Lösung

$\sin(\arcsin x) = x$ (Definitionsgemäss);

$\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$;

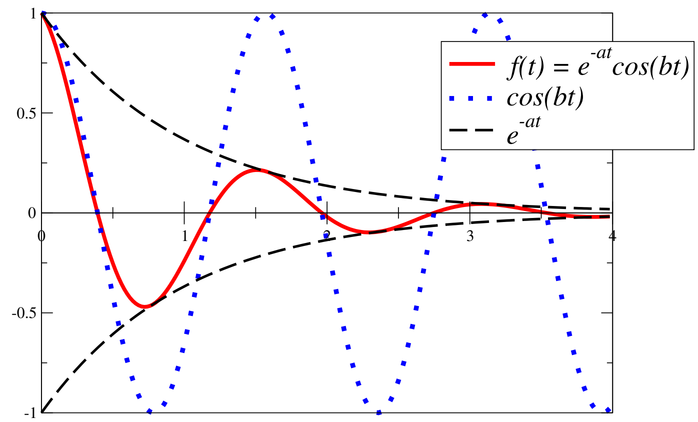
$\Rightarrow \qquad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$

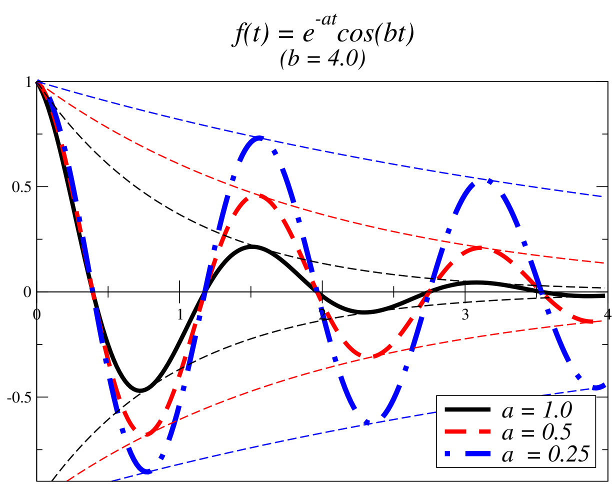
FAKULTATIVE Aufgaben

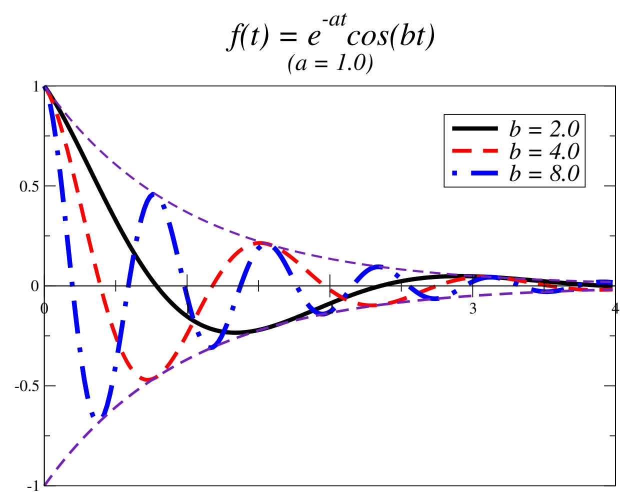
F1. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(t) = e^{-at}\cos(bt) \quad (a, b > 0)$. Ist die Funktion periodisch? (Die Funktion beschreibt den Free Induction Decay (FID), z.B. in der NMR)

Lösung

gedämpfter Oszillator







F2. Geben Sie, ausgehend von den Additionstheoremen für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, Ausdrücke für:

a) $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$

b) $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ an.

c) Benutzen Sie die Ergebnisse um den Zusammenhang

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

zu zeigen.

Lösung

Additionstheoremen:

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\sin\beta + \sin\alpha\,\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$

a)

$\sin(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\sin(-\beta) + \sin\alpha\,\cos(-\beta) = -\cos\alpha\,\sin\beta + \sin\alpha\,\cos\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos(-\beta) - \sin\alpha\,\sin(-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$

b)

$\sin\,2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\,\sin\alpha + \sin\alpha\,\cos\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$

$\cos\,2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\,\cos\alpha - \sin\alpha\,\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

c)

$$2\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] = 2\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\left[\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 2\left[\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\beta + \sin\alpha$$

F3. Zeigen Sie, daß für die Umkehrfunktion arsinh (Areasinus Hyperbolicus) des sinh gilt

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\,.$$

Lösen Sie dazu zunächst die Gleichung $y = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})$ mit $a = e^x$ und $y = \sinh(x)$ nach a auf. (Stimmt diese Gleichung mit der Definitionsgleichung des sinh überein?) Wie lautet die entsprechende Formel für $\operatorname{arcosh}(x)$?

Lösung

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;

$a = e^x$; $y = \sinh(x)$;

$y = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})$, $\Rightarrow$ $(a - \frac{1}{a}) = 2y \Rightarrow a^2 - 2ya - 1 = 0$;

$a_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$;

$a = e^x > 0$, $\Rightarrow$ $a = y + \sqrt{y^2 + 1} = e^x$;

$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$;

$y \;\rightarrow\; x$, $x \;\rightarrow\; y^{-1} = \operatorname{arsinh}(x)$;

$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.