Universität München
Department Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 13
01. 02. 2022

Übungen zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

Bitte unbedingt für Klausurteilnahme anmelden !!!

1. Berechnen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der folgenden Funktionen nach ihrer jeweiligen Variablen:
   a) $f(\omega) = \ln \omega$ b) $g(\phi) = a \sin \phi + \tan \phi$
   c) $f(u) = e^{-au^2}$ d) $f(z) = z^z$
   e) $f(y) = \log_2 y^2$

2. Bestimmen Sie die kritischen Punkte – ggf. angeben: Max, Min oder Terassenpunkt – und die Wendepunkte des Morsepotentials

$$V(r) = D \left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]^2 - D$$

   und skizzieren Sie die Funktion für die Parameterwerte $D = 2$, $a = 0.5$ und $r_0 = 4$ in dem Bereich $0 \leq r \leq 40$.

3. Konstruieren Sie mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens eine Lösung von $\sin x = x^2$ mit $x > 0$. Benutzen Sie $x_0 = 1$ als Startwert und tabellieren Sie die Approximation für x_i bis $i = 5$.
   Vergleichen und diskutieren Sie den Wert mit dem Resultat $x = 0.876726215395$.

4. **!!!!! BONUS Aufgabe !!!!!**
   Abgabe - *bis 12.00 Uhr, Dienstag, 01.02.2022.*

   Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = \frac{1}{7}(2x^4 - x^2 - 1)$.

   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die Nullstellen (N) von $f(x)$.

   b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von $f(x)$, und untersuchen Sie, ob jeweils ein Minimum (Min), Maximum (Max) oder ein Terassenpunkt (T) vorliegt.

   c) Bestimmen Sie die Wendepunkte (W) von $f(x)$.

   d) Geben Sie in einer schematischen Zeichnung der Funktion die Bereiche positiver (konvexer) bzw. negativer (konkaver) Krümmung an (mit Begründung). Kennzeichnen Sie alle charakteristischen Punkte.

FAKULTATIVE Aufgaben

F1. Bestimmen Sie die Ableitung denen Umkehrfunktionen:

$$\arctan x, \quad \ln x, \quad \log_a x$$

Lösung

1. N.R.

$$\frac{d}{dx}\tan\ x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{d}{dx}\frac{(\sin x)'\ \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(\sqrt{1-\sin^2 x})'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}(-2\sin x\ \cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$f(y) = \tan y = x\,,\ f^{-1}(x) = \arctan x = y\,,$$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\tan y)}{dy}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\Uparrow$$

$$x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} \qquad \to \qquad x{\cdot}\cos y = \sin y \qquad \to \qquad x^2{\cdot}\cos^2 y = \sin^2 y = 1-\cos^2 y$$

$$\to \cos^2 y(1+x^2) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

---

2. $\ln x:$
   $$f(y) = e^y = x\,, f^{-1}(x) = \ln x = y\,,\ (f^{-1}(x))' = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(e^y)}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x},$$

3. $$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a},$$

F2. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{x^2-x-2}$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.
$D_f : \mathbb{R} \setminus \{-1\,,2\}$

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs (auch bei den Definitionslücken). Überprüfen Sie, ob es stetig hebbare Definitionslücken gibt. Wenn ja, kürzen Sie mit dem entsprechenden Linearfaktor und rechnen Sie mit der vereinfachten Funktion weiter.
$x \to -1+0\,,\ f(x) \to -\infty\,;\ x \to -1-0\,,\ f(x) \to +\infty$
bei $x = -1$ – eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel;

$x \to 2 \pm 0\,,\ f(x) \to \dfrac{5}{3}$ – hebbare Definitionslüke
$x \to -\infty\,,\ f(x) \to -\infty\,;\ x \to +\infty\,,\ f(x) \to +\infty$

c) Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen von f.
$f(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+2x-3)}{x^2-x-2} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x-3)}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{x^2+2x-3}{x+1} = 0;$
$x^2+2x-3 = 0\,;\ \Rightarrow\ x_1 = 1\,,\ x_2 = -3$ – Nullstelle

d) Ermitteln Sie sämtliche kritischen Punkte von f und prüfen Sie, ob jeweils ein Minimum, ein Maximum oder ein Terassenpunkt vorliegt.
$f\,'(x) = \dfrac{x^2+2x+5}{(x+1)^2} = 0\,,\ x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4}\ \ \Rightarrow$ Keine kritischen Punkte
$f\,''(x) = \dfrac{-8}{(x+1)^3}$; für $x < -1\,, f\,''(x) > 0$ (konvex), für $x > -1\,,\ f\,''(x) < 0$ (konkav);

e) Ermitteln Sie, falls vorhanden, die Wendepunkte von f.
$f\,''(x) = \dfrac{-8}{(x+1)^3} \neq 0\quad \forall x, \Rightarrow$ keine Wendepunkte

f) Zeichnen Sie den Graph von f für $x \in [-5, 5]$.