Name: Matrikelnummer:

Department Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
der Universität München
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22

Probeklausur zur Vorlesung "Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I"

Die Klausur ist mit 50.5 Punkten bestanden. Maximal erreichbar sind 100 Punkte.
Bearbeitungszeit: **150 min**
Bitte auf jedes Blatt den Namen und die Matrikelnummer schreiben.

Platznummer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte	9	6	8	9	6	9	21	13	11	8
Erreichte Punkte										

Erreichte Punktzahl	
Bonuspunkte	
Note	

Hinweise:

- **Die Lösungen sind in den vorgedruckten Blättern zu bestimmen und deutlich sichtbar durch Einkreisen zu kennzeichnen bzw. in die entsprechenden Felder einzutragen.**
- Von angegebenen Lösungsalternativen auf den Vordrucken ist jeweils nur eine richtig.
- **Die Zusatzblättern sind** *zusammen* **mit den ausgefüllten Vordrucken abzugeben.**
- **Korrigiert** werden nur die Lösungen auf den vorgedruckten Blättern.
- Lösungen ohne nachvollziehbaren Rechenweg werden nicht gewertet.
- **Schreibmaterial:** Kugelschreiber, Füllfederhalter, etc. (vorzugsweise blau). **Nicht** zugelassen als Schreibmaterial sind Bleistift und Rotstift.
- Bitte keine korrekturflüssigkeit verwenden. Falsche Lösungen deutlich streichen.
- Beschriften Sie die Achsen der Koordinatensysteme. Kennzeichnen Sie deutlich wichtige Punkte, die zur Aufgabenlösung gehören.
- **Jegliche elektronische Hilfsmittel (u.A. Taschenrechner, Handys) sind ausdrücklich verboten!**

Name: Matrikelnummer:

1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_2^{e^2} \frac{\ln(x^2 \cdot e)}{x}\, dx$ (Hinweis: Eigenschaften der Logarithmusfunktionen)

$\ln(x^2 \cdot e) = \ln(x^2) + \ln e = 2\ln x + 1$

$$\int_2^{e^2} \frac{2\ln x + 1}{x}\, dx = 2\int_2^{e^2} \frac{\ln x}{x}\, dx + \int_2^{e^2} \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \underset{F}{\ln x} \cdot \underset{G'}{\frac{1}{x}}\, dx = \ln x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \ln x\, dx \Rightarrow \int \ln x \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$= \cancel{2} \cdot \left[\frac{(\ln x)^2}{\cancel{2}}\right]_2^{e^2} + \left[\ln x\right]_2^{e^2} = (2^2 - (\ln 2)^2) + (2 - \ln 2)$$
$$= 6 - \ln 2(\ln 2 + 1)$$

1. $\boxed{\frac{\ln 2}{2} + 1}$ 2. $\boxed{\ln 2 - 1}$ 3. $\boxed{e^2 + 1}$ 4. $\boxed{6 - \ln 2(\ln 2 + 1)}$ 5. $\boxed{e - 1}$ (3.0 P)

b) $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cos(x)dx$ (Partielle Integration oder Substituiton: $u = \sin x$)

1) Partielle Integration:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{F}{\sin^3 x} \cdot \underset{G'}{\cos x}\, dx = \underset{F}{\sin^3 x} \cdot \underset{G}{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{3\sin^2 x \cdot \cos x}_{F'} \cdot \underbrace{\sin x}_{G}\, dx$$

$$= \sin^4 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x\, dx \Rightarrow 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x\, dx = \sin^4 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\, dx = \frac{1}{4}\sin^4 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(1 - 0) = \frac{1}{4}$$

2) $u = \sin x$; $du = (\sin x)' dx = \cos x\, dx$. $x = 0 \rightarrow u = 0$

$$\int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{4}$$; $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$

1. $\boxed{0}$ 2. $\boxed{-\frac{1}{3}}$ 3. $\boxed{\frac{1}{3}}$ 4. $\boxed{\frac{2}{5}}$ 5. $\boxed{\frac{1}{4}}$ (3.0 P)

Name: Matrikelnummer:

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$

$$\int_1^2 \left[\frac{\sqrt{x}}{x^3} - \frac{x^3e^x}{x^3} + \frac{x^2}{x^3}\right] dx = \int_1^2 \left(x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= -\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{\cancel{x}2^3}} + \frac{2}{3} - e^2 + e + \ln 2 - \ln 1$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3} - e^2 + e + \ln 2$$

(3.0 P)

Name: Matrikelnummer:

2. a) Welche der folgenden Vektorpaare stehen senkrecht aufeinander (mit Begründung):

$$a_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, b_I = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}; a_{II} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_{II} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}; a_{III} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\xi \\ -\sin\xi \end{pmatrix}, b_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\xi \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a}_I \cdot \vec{b}_I = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0 = -1+1+0 = 0$$

$$\vec{a}_{II} \cdot \vec{b}_{II} = 2\cdot 4 + 1\cdot 6 + 2\cdot(-7) = 8+6-14 = 0$$

$$\vec{a}_{III} \cdot \vec{b}_{III} = 1\cdot 0 + \tan\xi\cdot\cos\xi + (-\sin\xi)\cdot 1$$

$$= 0 + \frac{\sin\xi}{\cancel{\cos\xi}}\cdot\cancel{\cos\xi} - \sin\xi = 0$$

1. $\boxed{\text{I und II}}$ 2. $\boxed{\text{I und III}}$ 3. $\boxed{\text{Alle Vektorpaare}}$ 4. $\boxed{\text{II und III}}$ 5. $\boxed{\text{Nur I}}$

(3.0 P)

b) Berechnen Sie für die Vektorpaare das Kreuzprodukt $\vec{a}_{II} \times \vec{b}_{II}$

$$\vec{a}_{II} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-7) - 2\cdot 6 \\ 2\cdot 4 - 2(-7) \\ 2\cdot 6 - 1\cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7-12 \\ 8+14 \\ 12-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -19 \\ 22 \\ 8 \end{pmatrix}$$

II 1. $\boxed{\begin{pmatrix} -21 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}}$ 2. $\boxed{\begin{pmatrix} -19 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix}}$ 3. $\boxed{\begin{pmatrix} -20 \\ 22 \\ 7 \end{pmatrix}}$ 4. $\boxed{\begin{pmatrix} -19 \\ 22 \\ 8 \end{pmatrix}}$ 5. $\boxed{\begin{pmatrix} -21 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix}}$

(3.0 P)

Name: Matrikelnummer:

3. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen, falls sie existieren.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-2}-\frac{n^2}{n+3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cot(\frac{\pi}{2}x)}{\ln x}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-2}-\frac{n^2}{n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+3)-n^2(n-2)}{(n-2)(n+3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(\cancel{n}+3-\cancel{n}+2)}{\cancel{n}(1-\frac{2}{n})\cdot\cancel{n}(1+\frac{3}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{(1-\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}$$

$$=5$$

a) 1. $\boxed{\text{Existiert nicht}}$ 2. $\boxed{2n}$ 3. $\boxed{5}$ 4. $\boxed{\frac{2}{3}}$ 5. $\boxed{\frac{5}{2}}$ (4.0 P)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cot(\frac{\pi}{2}x)^{\to 0}}{\ln x_{\to 0}}$$ l'Hospital Regel $$\lim_{x\to 1}\frac{(\cot(\frac{\pi}{2}x))'}{(\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}}{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}$$

b) 1. $\boxed{1}$ 2. $\boxed{\text{Existiert nicht}}$ 3. $\boxed{\frac{\pi}{2}}$ 4. $\boxed{-1}$ 5. $\boxed{-\frac{\pi}{2}}$ (4.0 P)

Name: Matrikelnummer:

4. Gegeben seien die beiden Matrizen $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, und die beiden Vektoren $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $i^2 = -1$. Berechnen Sie:

a) $X \cdot Y - Y \cdot X$

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$YX = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$XY - YX = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$ (3.0 P)

b) $\frac{1}{2}(X + iY)\alpha$ (I) und $\frac{1}{2}(X + iY)\beta$ (II)

$$\frac{1}{2}(X + iY) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad \frac{1}{2}(X + iY)\cdot\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{II} \quad \frac{1}{2}(X + iY)\cdot\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha$$

I: 1. α 2. β 3. 0 4. $\alpha - \beta$ 5. $-\beta$ (1.5 P)

II: 1. α 2. 0 3. $\beta + \alpha$ 4. β 5. $-\alpha$ (1.5 P)

Name: Matrikelnummer:

3. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen, falls sie existieren.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-2}-\frac{n^2}{n+3}\right)$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{\cot(\frac{\pi}{2}x)}{\ln x}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-2}-\frac{n^2}{n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+3)-n^2(n-2)}{(n-2)(n+3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(\cancel{n}+3-\cancel{n}+2)}{\cancel{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cancel{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$

$$=5$$

a) 1. Existiert nicht 2. $2n$ 3. 5 4. $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{5}{2}$ (4.0 P)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)^{\to 0}}{\ln x_{\to 0}} \quad \underline{\text{l'Hospital Regel}} \quad \lim_{x\to 1}\frac{\left(\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)'}{(\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}{\frac{1}{x}}=-\frac{\pi}{2}$$

b) 1. 1 2. Existiert nicht 3. $\frac{\pi}{2}$ 4. -1 5. $-\frac{\pi}{2}$ (4.0 P)

Name: Matrikelnummer:

c) $\frac{1}{2}(X-iY)\alpha$ (I) und $\frac{1}{2}(X-iY)\beta$ (II)

$$\frac{1}{2}(X-iY) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\text{I.}\quad \frac{1}{2}(X-iY)\cdot\alpha = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \beta$$

$$\text{II}\quad \frac{1}{2}(X-iY)\cdot\beta = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

I 1. $\boxed{\alpha}$ 2. $\boxed{\beta}$ 3. $\boxed{0}$ 4. $\boxed{\alpha+\beta}$ 5. $\boxed{-\beta}$ (1.5 P)

II 1. $\boxed{0}$ 2. $\boxed{\alpha}$ 3. $\boxed{-\beta}$ 4. $\boxed{\beta-\alpha}$ 5. $\boxed{\beta}$ (1.5 P)

5. Ein Parallelepiped werde durch folgende drei Vektoren aufgespannt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Volumen (V) des Parallelepipeds.

$$V = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| = \left|\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{pmatrix}1-2\\1-2\\4-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|(-1-1+6)\right| = 4$$

1. $\boxed{V=\frac{1}{\sqrt{3}}}$ 2. $\boxed{V=2}$ 3. $\boxed{V=\frac{1}{\sqrt{5}}}$ 4. $\boxed{V=4}$ 5. $\boxed{V=\frac{1}{\sqrt{4}}}$ (6.0 P)

Name: Matrikelnummer:

6. Berechnen Sie Betrag ($|z_n| = r_n$) und Phase (ϕ_n) ($n = 1, 2, 3$) der komplexen Zahlen:

$z_1 = 1 - \dfrac{1}{1+i}$,

$$z_1 = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i\,(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ; \quad \varphi_1 = \arccos \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(2 P)

$z_2 = \dfrac{1-i}{1+i}$,

$$z_2 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$r_2 = \sqrt{0+1} = 1\ ; \quad \varphi_2 = -\arccos \emptyset = -\frac{\pi}{2}$$

(2 P)

$z_3 = \dfrac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}\,i}$,

$$z_3 = \frac{(-2\sqrt{3}+i)(1-2\sqrt{3}\,i)}{(1+2\sqrt{3}\,i)(1-2\sqrt{3}\,i)} = \frac{\cancel{-2\sqrt{3}} + i + 12 i \cancel{- 2\sqrt{3}\,i^2}}{1+12}$$

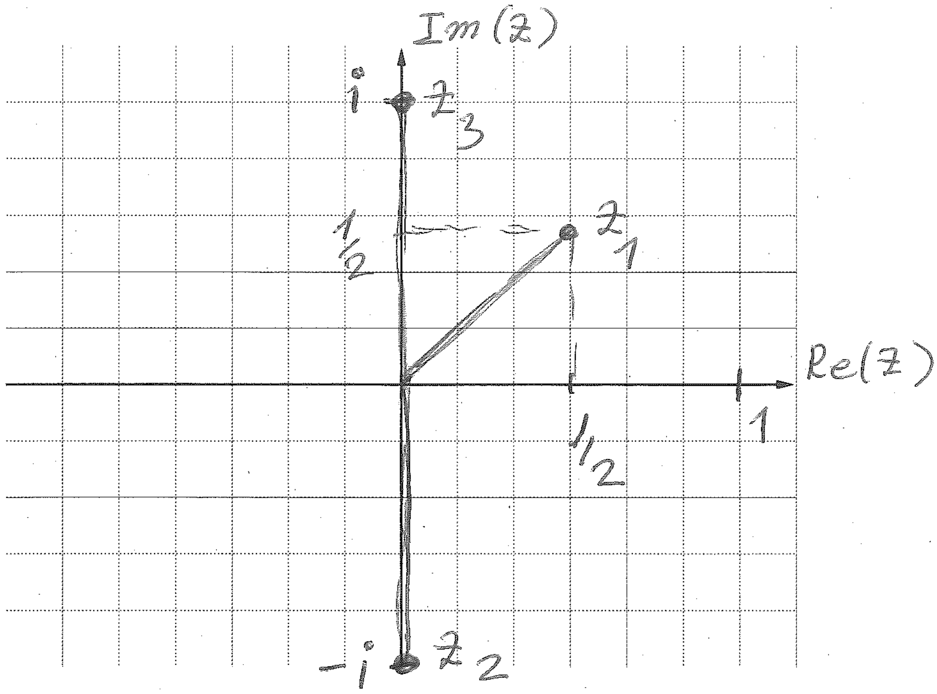
$$= \frac{13 i}{13} = i$$

$$r_3 = \sqrt{0+1} = 1\ ; \quad \varphi_3 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

(2 P)

Name: Matrikelnummer:

Stellen Sie für z_1, z_2 und z_3 Realteil, Imaginärteil, Betrag in der Gaußschen Zahlebene dar.



(je 1 P)

7. Geben Sie für die folgenden Funktionen $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich $D(f)$, sowie die 1. Ableitung und 2. Ableitung an:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$,

$x^2+2x-3 \geq 0 \quad x^2+2x-3=0;\ x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -3$

$D(f)$: 1. $\boxed{\mathbb{R}\setminus]1,3[}$ 2. $\boxed{\mathbb{R} \setminus [-3,1]}$ 3. $\boxed{x \in [-1,5]}$ 4. $\boxed{\mathbb{R}\setminus]-3,1[}$ 5. $\boxed{\mathbb{R}^+}$

(2.0 P)

$f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

(2.0 P)

$f''(x)$:

$$f''(x) = \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}\right)' = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+2x-3} - (x+1)\cdot\frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x-3}}}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2}$$

$$= \frac{(x^2+2x-3) - (x+1)(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)^3}$$

$$= \frac{(x^2+2x-3) - (x^2+2x+1)}{\sqrt{(x^2+2x-3)^3}}$$

$$= \frac{x^2+2x-3-x^2-2x-1}{\sqrt{(x^2+2x-3)^3}} = \frac{-4}{\sqrt{(x^2+2x-3)^3}}$$

(3.0 P)

b) $f(x) = e^{-\cos^2 x}$,

$D(f)$: 1. $\mathbb{R}$ 2. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 3. $\mathbb{R}^-$ 4. $\mathbb{R}_0^+$ 5. $\mathbb{R}^+$

(2.0 P)

$f'(x)$:)

$$f'(x) = e^{-\cos^2 x}\cdot\left[-2\cos x\cdot(-\sin x)\right]$$

$$= e^{-\cos^2 x}\cdot 2\cos x\cdot\sin x$$

$$= \sin(2x)\cdot e^{-\cos^2 x}$$

(2.0 P)

$f''(x)$:)

$$f''(x) = 2\cos(2x)\cdot e^{-\cos^2 x} + \sin(2x)\cdot\sin(2x)\cdot e^{-\cos^2 x}$$

$$= e^{-\cos^2 x}\cdot\left[2\cos(2x)+\sin^2(2x)\right]$$

(3.0 P)

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

$D(f)$: 1. $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ 2. $\boxed{\mathbb{R}^+}$ 3. $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ 4. $\boxed{\mathbb{R}^+\setminus\{0\}}$ 5. $\boxed{\mathbb{R}}$

(2.0 P)

$f'(x)$:)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x\cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

(2.0 P)

$f''(x)$:)

$$f''(x) = \frac{-2\frac{1}{x}\cdot x^3 - (1-2\ln x)\cdot 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2\ln x}{x^6} = \frac{-5x^2+6x^2\ln x}{x^6}$$

$$= \frac{x^2(6\ln x - 5)}{x^6} = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$$

(3.0 P)

8. Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = \sqrt{x(1-x^3)}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die Nullstellen (N) von $f(x)$.

$x(1-x^3) \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 1]$

$x(1-x^3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \, ; \, x_2 = 1 \, .$

1. $D_f : \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 2. $D_f : \mathbb{R}^+$ 3. $D_f : x \in [0,1]$ 4. $D_f : \mathbb{R}^+ \cup 0$ 5. $D_f : x \in [-1,1]$ (2.0 P)

N: 1. $x = 1$ 2. $x_{1,2} = \pm 1$ 3. $x = 0$ 4. $x_{1,2} = 0,\ 1$ 5. $x = -1$ (2.0 P)

b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von $f(x)$, und untersuchen Sie, ob jeweils ein Minimum (Min), Maximum (Max) oder ein Terassenpunkt (T) vorliegt.

$f'(x) = \dfrac{1-4x^3}{2\sqrt{x(1-x^3)}} = 0 \Rightarrow 1-4x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

$f''(x) = \dfrac{8x^6 - 16x^3 - 1}{4\left(\sqrt{x(1-x^3)}\right)^3} \, ; \quad f''(x_1) < 0$

$\Rightarrow$ Maximum

1. $x = 1\,(Max),\ x = -1\,(Min)$ 2. $x = -1\,(Max),\ x = 1\,(Min)$

3. $x = \sqrt[3]{-1/2}\ \ (Min)$ 4. $x = -1/4\ \ (Max)$ 5. $x = \sqrt[3]{1/4}\ \ (Max)$ (3.0 P)

c) Bestimmen Sie die Wendepunkte (W) von $f(x)$.

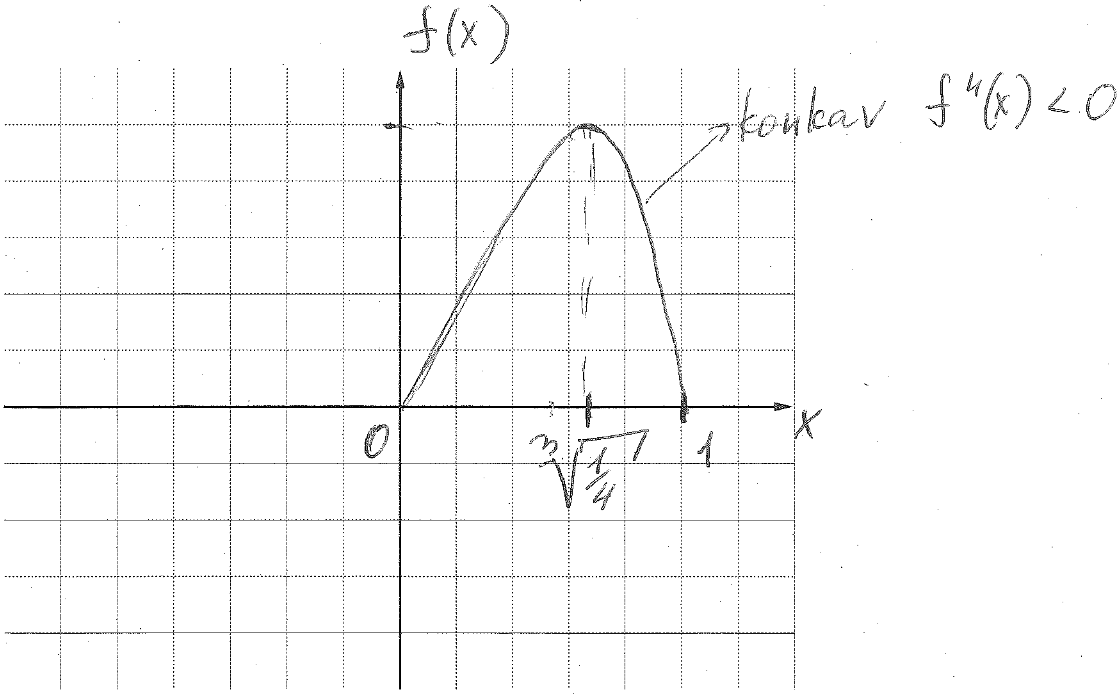
$f''(x) = 0 \Rightarrow 8x^6 - 16x^3 - 1 = 0$

$x_1 = \sqrt[3]{1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}} > 1 \, ; \quad x_2 = \sqrt[3]{1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{4}} < 0 \, ;$

1. $W : x = \sqrt[3]{1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$ 2. $W : x = 0$ 3. $W : x_{1,2} = \pm 1$

4. $W : x_1 = \sqrt[3]{1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}}, \quad x_2 = \sqrt[3]{1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$ 5. Keine Wendepunkte (3.0 P)

d) Geben Sie in einer schematischen Zeichnung der Funktion die Bereiche positiver (konvex) bzw. negativer (konkav) Krümmung an (mit Begründung). Kennzeichnen Sie alle charakteristischen Punkte.



(3.0 P)

Name: Matrikelnummer:

9. Bilden die Matrizen Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation? Erstellen Sie eine Multiplikationstabelle und begründen Sie Ihre Antwort.

$\circ$	A	B	C
A	A	B	C
B	B	C	A
C	C	A	B

(6 P)

a) Geschlossenheit: z.B. $B \in G$ $C \in G$

$$B \circ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \in G$$

b) Assoziativgesetz:

$$A \circ (B \circ C) = A \circ A = A$$
$$(A \circ B) \circ C = B \circ C = A$$

c) Neutrales Element: A

d) Inverses Element: B ist inverses El. z C

$B \circ C = A$ ...

(4 P)

Ist die Gruppe abelsch? 1. Ja 2. Nein (1 P)

Name: Matrikelnummer:

10. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

a) Induktionsanfang :

$n = n_0 = 1$

$$1(1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

$$2 = 2$$

b) Induktionsannahme:

$n = m > n_0$

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$$

c) Induktionsschritt:

$n = m + 1$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{m} k(k+1) + (m+1)(m+1+1)$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{3} + (m+1)(m+2)$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2) + 3(m+1)(m+2)}{3}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(8.0 P)