Universität München
Department Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 5
23. 11. 2021

Übungen zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Gegeben seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}; \qquad 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$

2. Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. (α sei der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von 2)).
   1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/4 \\ -1/3 \end{pmatrix}$; 2) für $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ und $\alpha = \pi/3$.

3. **!!!!! BONUS Aufgabe !!!!!**
   Abgabe - *bis 12.00 Uhr, Dienstag, 23.11.2021.*
   Ergebnisse - *ab Mittwoch, 24.11.2021.*

   Es sei $\vec{a} = (2, 0, -3)$, $\vec{b} = (3, 4, -3)$.
   Berechnen Sie $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $(\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, den Flächeninhalt des Parallelogrammes, dass von $\vec{a}$, $\vec{b}$ aufgespannt wird, sowie einen Einheitsvektor $\vec{e}$, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

4. Berechnen Sie für die 3 Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   a) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{a}$
   b) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{a} \times \vec{b})$
   c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
   d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

5. Die drei Punkte A,B und C mit den Ortsvektoren $\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ legen die Ecken eines Dreiecks fest. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, die Längen der drei Seiten und die drei Winkel.

Fakultative Aufgaben

Diese Aufgaben werden nicht in der Übung bearbeitet. Ihr Übungsleiter wird aber gern alle Fragen dazu beantworten.

F1. Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Wahl des Koordinatensystems den Bindungswinkel H-C-H des Metan Moleküls CH_4 (Tetraederwinkel).

F2. Die Einheitszelle eines hexagonalen Kristallgitters wird durch die drei Vektoren

$$\vec{a} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt, wobei sich die Komponenten auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit x-, y- und z-Achse beziehen.

a) Berechnen Sie die Länge der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$, und stellen sie ihre Lage im Fall $a = 1$ und $c = \sqrt{\frac{8}{3}}$ graphisch dar.

Lösung

$|\vec{a}| = 1; \ \ |\vec{b}| = 1; \ \ |\vec{c}| = \sqrt{\frac{8}{3}};$

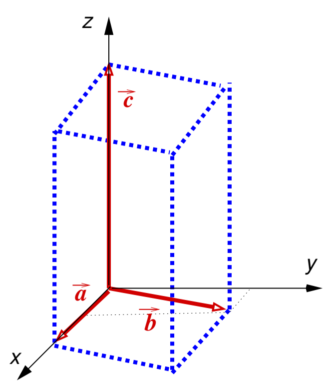

Abb.

b) Berechnen sie das Volumen der Einheitszelle zunächst allgemein und dann mit den in a) gegebenen Werten.

Lösung

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot 0 \\ a \cdot 0 - \frac{a}{2} \cdot 0 \\ a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{a}{2} \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 c;$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{2}.$$