Universität München
Department Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 7
07. 12. 2021

Übungen zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I"

1. Gegeben seien die folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Ortho**normal**basis des von diesen Vektoren aufgespannten Raumes.

2. Berechnen Sie folgende Ausdrücke und benennen Sie die resultierenden Matrizen gemäß den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.2.1 des Vorlesungsskriptes. Geben Sie die Dimension der darin vorkommenden, sowie der resultierenden Matrizen an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -12 & 4 & -2 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(5 \quad 3 \quad 1)\,;$$

$$(4 \quad 1 \quad 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. !!!!!! **BONUS** Aufgabe !!!!!
   Abgabe - *bis 12.00 Uhr, Dienstag, 07.12.2021.*
   Ergebnisse - *ab Mittwoch, 08.12.2021.*

   Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, sowie die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die drei Vektoren $\vec{a}_i$ zeichnerisch dar. Welchen Betrag haben sie? Berechnen Sie die Vektoren $A\vec{a}_i$ für $i = 1, 2, 3$ (behandeln sie dabei die Vektoren $\vec{a}_i$ wie eine 2x1 Matrix) und vergleichen Sie die berechneten Vektoren mit den ursprünglichen. Vollziehen Sie das gleiche für die Matrix B. Beschreiben Sie in Worten die Operationen, die die Matrizen A und B angewendet auf die Vektoren $\vec{a}_i$ ausführen.

4. Berechnen Sie die Inverse der 2×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, indem Sie die Matrix–Gleichung $AB = E$ in vier Gleichungen für die vier Unbekannten B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} umschreiben und diese direkt auflösen. Führen Sie die Probe durch.

FAKULTATIVE Aufgaben

Diese Aufgaben werden nicht in der Übung bearbeitet. Ihr Übungsleiter wird aber gern alle Fragen dazu beantworten.

F1. **Definition:** Ist V ein Vektorraum über K, dann heißt eine Teilmenge $U \subseteq V$ Untervektorraum oder Teilraum von V, wenn U mit den von V geerbten Verknüpfungen ein K-Vektorraum ist.
Für einen Unterraum U eines endlich dimensionalen Raumes V gilt:
1. dim $U \leq$ dim V
2 dim $U =$ dim $V \Leftrightarrow U = V$

Die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind die Vektoren in einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ (nicht unbedingt einen Basis).

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Ortho**normal**basis dieses Unterraums.

b) Welche Dimension hat dieser Unterraum?

Lösung

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1)}{|\vec{b}_1|^2}\,\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1)}{|\vec{b}_1|^2}\,\vec{b}_1 - \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2)}{|\vec{b}_2|^2}\,\vec{b}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{7}{26} - \frac{3 \cdot 11}{2 \cdot 13} \\ \frac{3}{26} - \frac{3}{26} \\ 2 - \frac{4}{26} - \frac{48}{26} \\ 1 - \frac{2}{26} - \frac{24}{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Orthonormalen Basisvektoren:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \sqrt{\frac{1}{442}}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

b) Welche Dimension hat dieser Unterraum? – **2**.

F2. Gegeben seien die Matritzen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Berechnen Sie:

$AB - BA$, $(A + B)C$ und $(5A)(2B)$.

Lösung

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 13 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6 & 13 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(A{+}B)C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-4 & 12+15 & 8+2+5 \\ 1 & 3+3 & 2+1 \\ 2-4 & 6+9 & 4+2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 27 & 15 \\ 1 & 6 & 3 \\ -2 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(5A)(2B) = 10AB = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 50 \\ 10 & 10 & 10 \\ 60 & 40 & 60 \end{pmatrix}$$