Universität München
Department Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 14
08. 02. 2022

Übungen zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

Bitte unbedingt für die Klausurteilnahme anmelden !

1. Berechnen Sie das Integral $\int_0^b x^2\,dx$ indem Sie x^2 für eine äquidistante Zerlegung durch eine stückweise konstante Funktion nähern und den Grenzwert einer immer feineren Zerlegung betrachten.

   Hinweis: Betrachten sie die Untersumme für n aquidistante Schritte Δx mit Stützstellen $x_i = i{*}\Delta x$. Drücken sie Δx überall durch n aus und betrachten sie den Grenzwert fr $n \to \infty$. Benutzen sie dabei die Summenformel $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(\mathtt{n}+1)(2n+1)}{6}$. Machen sie sich eine Skizze dazu.

2. **!!!!! BONUS Aufgabe !!!!!**

   Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

   $\int\limits_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ $\quad\int\limits_{-1}^{0} (e^{2x} - 1)\,dx$ $\quad\int\limits_1^2 \frac{(x-1)^3}{x}\,dx$ $\quad\int\limits_1^2 x\,\log_2 x\,dx$

3. Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen:

   a) $\int xe^{-\alpha x}\,dx$ $\quad$ b) $\int \ln x\,dx$ $\quad$ c) $\int (\ln x)^2\,dx$

   Hinweise: zu b): Schreiben Sie den Integranden als $1 \cdot \ln x$ und verwenden dann die partielle Integration. Lösen Sie c) wiederum durch partielle Integration und verwenden Sie dabei das Ergebnis von b).

4. Bestimmen Sie Stammfunktionen zu den Funktionen $\sin^2 \alpha x$ und $\cos^2 \alpha x$, indem Sie partielle Integration und die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ anwenden.

FAKULTATIVE Aufgaben

F1. Berechnen Sie zu der Funktion $f:[0,1]\to[0,1]\,;\; x\mapsto x$ und der (äquidistanten) Zerlegung $\mathrm{Z}_N:\; x_i=\frac{i}{N}$ (i=0,...,N) $\quad N\in\mathbb{N}$ die **Ober-** und **Untersumme** und die Differenz dieser beiden Summen. (Falls Sie mit allgemeinem N Schwierigkeiten haben, setzen Sie für N zuerst einmal kleine natürliche Zahlen ein.)

Stellen Sie die Summen anhand einer Skizze als Flächeninhalte dar.

Berechnen Sie die jeweiligen Grenzwerte für $N\to\infty$

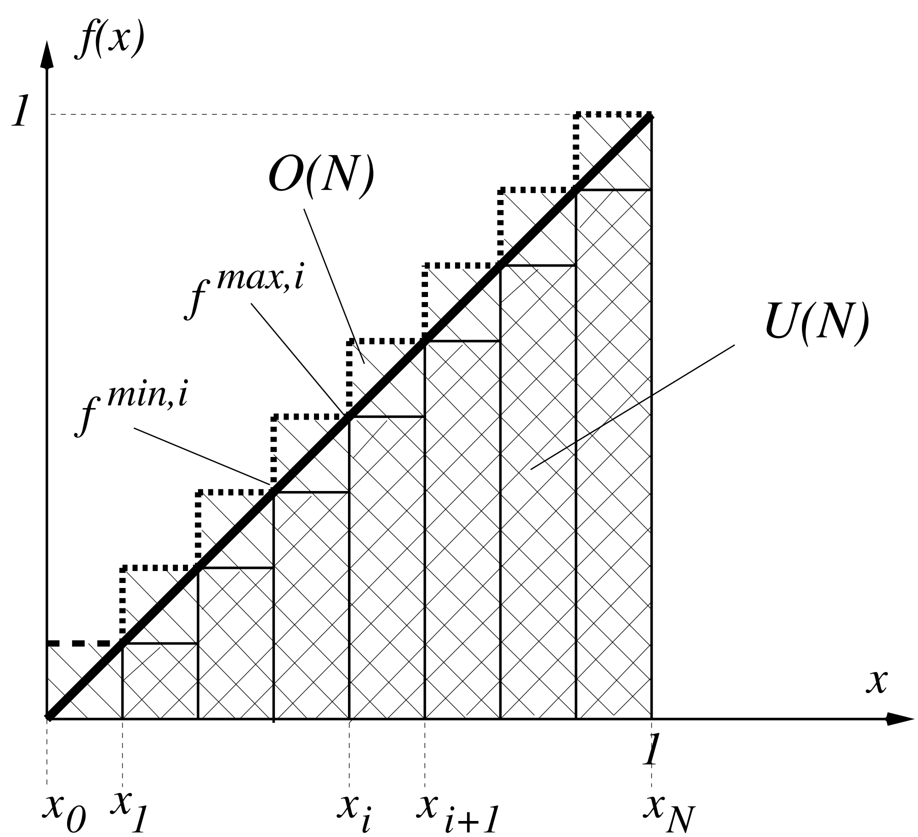
Lösung

$$O(N)=\sum_{i=1}^{N} f^{max\,,i}(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot\frac{1}{N}=\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{N}\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i=\frac{1}{N^2}\,\frac{N(N+1)}{2}=\frac{N+1}{2N}$$

$$U(N)=\sum_{i=0}^{N-1} f^{min\,,i}(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{N-1} x_i\cdot\frac{1}{N}=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{i}{N}\cdot\frac{1}{N}=0+\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1}(i)=\frac{1}{N^2}\,\frac{(N-1)N}{2}=\frac{N-1}{2N}$$

$$D=O(N)-U(N)=\frac{N+1}{2N}-\frac{N-1}{2N}=\frac{1}{N}$$

$N\to\infty \quad\Rightarrow\quad D\to 0.$



F2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$\int\limits_1^3 x^3 \ln(x^2)\, dx \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\ \sin(2x)\, dx$

Lösung

1)

$$\int\limits_1^3 x^3 \ln(x^2)\, dx = 2 \int\limits_1^3 x^3 \ln x\ dx$$

Partielle Integration:

$$= 2\, \frac{x^4}{4} \cdot \ln x \Bigg|_1^3 - 2 \int\limits_1^3 \frac{x^4}{4}\, \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^4}{2} \cdot \ln x \Bigg|_1^3 - \frac{1}{2} \int\limits_1^3 x^3\, dx$$

$$= \frac{x^4}{2} \cdot \ln x \Bigg|_1^3 - \frac{1}{2}\, \frac{x^4}{4} \Bigg|_1^3 = \boldsymbol{\frac{81}{2} \ln 3 - 10}\, ;$$

2)

Partielle Integration und $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{\underline{\cos^5 x\ \sin(2x)\, dx}} = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\ \sin\ x \cos\ x\, dx$

$= 2 \cos^6 x(-\cos\ x) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos^5 x\, (-\sin\ x)(-\cos\ x)\, dx$

$= -2 \cos^7 x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - 6 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{\underline{\cos^5 x\ \sin(2x)\, dx}} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\ \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{7} \cdot 2\ \cos^7 x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{7}(0-1) = \frac{2}{7}$