Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 14
08. 02. 2022

Musterlösung der Blatt 14 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Berechnen Sie das Integral $\int_0^b x^2\,dx$ indem Sie x^2 für eine äquidistante Zerlegung durch eine stückweise konstante Funktion nähern und den Grenzwert einer immer feineren Zerlegung betrachten.

   Hinweis: Betrachten sie die Untersumme für n aquidistante Schritte Δx mit Stützstellen $x_i = i * \Delta x$. Drücken sie Δx überall durch n aus und betrachten sie den Grenzwert für $n \to \infty$. Benutzen sie dabei die Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(\mathtt{n}+1)(2n+1)}{6}$. Machen sie sich eine Skizze dazu.

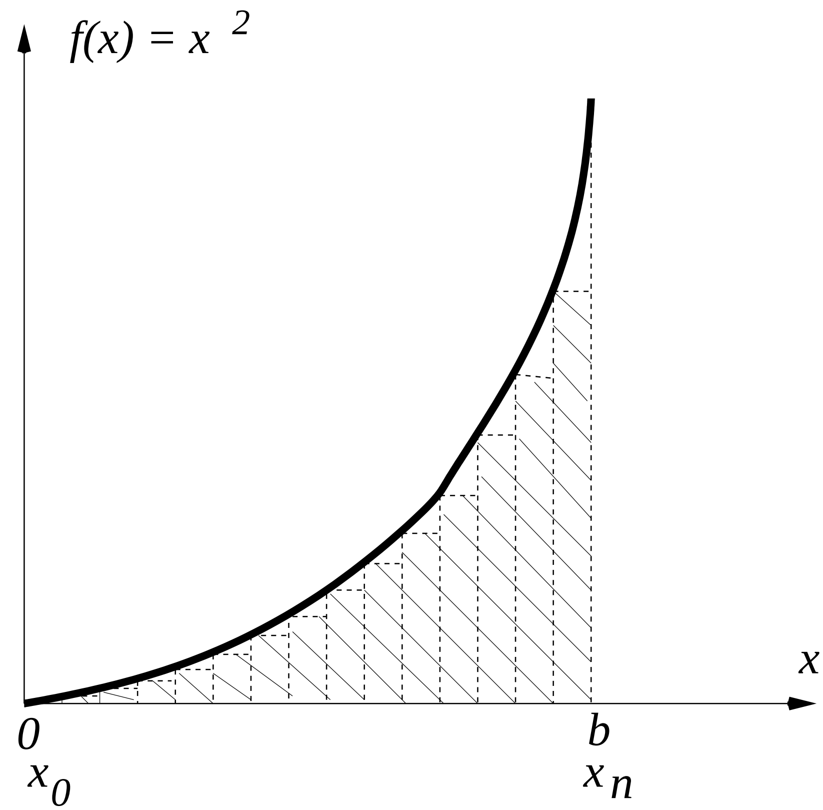
   Lösung

$$x_i = i\frac{b}{n}$$

$$\int_0^b x^2\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2\frac{b^2}{n^2}\frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{b^3}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = 0 + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n[2(n-1)+1]}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{n^3} = \frac{b^3}{3}$$


f(x) = x 2
x
0
x0
b
xn

2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$\int\limits_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \, dx \qquad \int\limits_{-1}^0 (e^{2x} - 1)\, dx \qquad \int\limits_1^2 \frac{(x-1)^3}{x}\, dx \qquad \int\limits_1^2 x \, \log_2 x \, dx$

Lösung

1)

$$\int\limits_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int\limits_1^2 \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \int\limits_1^2 x\, dx - 2\int\limits_1^2 dx + \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \ln x\right]\Bigg|_1^2 = \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2 + \ln\, 2 - \frac{1^2}{2} + 2\cdot 1 - \ln\, 1$$

$$= 2 - 4 + \ln\, 2 - \frac{1}{2} + 2 - 0 = \; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \ln \mathbf{2}\,;$$

2)

$$\int\limits_{-1}^0 (e^{2x} - 1)\, dx = \int\limits_{-1}^0 e^{2x}\, dx - \int\limits_{-1}^0 dx = \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_{-1}^0 - x\Big|_{-1}^0$$

$$= \frac{1}{2}(e^0 - e^{-2}) - (0+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} - 1 = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2e^2}}\,;$$

3)

$$\int\limits_1^2 \frac{(x-1)^3}{x}\, dx = \int\limits_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x}\, dx = \int\limits_1^2 \left(x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x - \ln x\right]\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{3\cdot 2^2}{2} + 3\cdot 2 - \ln\, 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3\cdot 1^2}{2} + 3\cdot 1 - \ln\, 1\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 6 + 6 - \ln\, 2 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3 + 0 = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} - 3 - \ln\, 2 = \frac{14 + 9 - 18}{6} - \ln\, 2 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} - \ln \mathbf{2}\,;$$

4)

Partielle Integration:

$$F' = x\,, \;\; F = \frac{x^2}{2}\,; \;\; G = \log_2 x\,, \;\; G' = (\log_2 x)' = \left(\frac{\ln\, x}{\ln\, 2}\right)' = \frac{1}{\ln\, 2}\,\frac{1}{x}$$

$$\int\limits_1^2 x\, \log_2 x\, dx = \frac{x^2}{2}\log_2 x\Bigg|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x\, \ln\, 2}\, dx = \frac{x^2}{2}\log_2 x\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2\, \ln\, 2}\int\limits_1^2 x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\log_2 x\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2\, \ln\, 2}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = 2\cdot \log_2 2 - \frac{1}{2}\log_2 1 - \frac{1}{2\, \ln\, 2}\frac{2^2}{2} + \frac{1}{2\, \ln\, 2}\frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{\ln\, 2} + \frac{1}{4\ln\, 2} =$$

$$2 - \frac{3}{4\ln\, 2}$$

3. Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int xe^{-\alpha x}\,dx$ b) $\int \ln x\,dx$ c) $\int (\ln x)^2\,dx$

Hinweise: zu b): Schreiben Sie den Integranden als $1 \cdot \ln x$ und verwenden dann die partielle Integration. Lösen Sie c) wiederum durch partielle Integration und verwenden Sie dabei das Ergebnis von b).

Lösung
a) partielle Integration

$$g = x\,,\;\; g' = 1\,;\quad f' = e^{-\alpha x}\,,\quad f = \frac{1}{\alpha}\,e^{-\alpha x}\,;\quad \int gf'dx = gf - \int g'f\,dx$$

$$\int xe^{-\alpha x}\,dx = x\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha x} - \int\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha x}dx = \left(-\frac{x}{\alpha}\right)e^{-\alpha x} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)\int e^{-\alpha x}dx =$$

$$\int xe^{-\alpha x}\,dx = x\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha x} - \int\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha x}dx = \left(-\frac{x}{\alpha}\right)e^{-\alpha x} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)\int e^{-\alpha x}dx =$$

$$= \left(-\frac{x}{\alpha}\right)e^{-\alpha x} - \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha x} + C\,;\qquad \underline{F(x) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\left(x + \frac{1}{\alpha}\right) + C}\,;$$

b) partielle Integration

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx$$

$$g = \ln\,x\,,\quad g' = \frac{1}{x}\,;\quad f' = 1\,,\quad f = x\,;$$

$$\int 1 \cdot \ln x\,dx = x\,\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\,\ln x - \int\,dx = x\,\ln x - x\,;\qquad \underline{F(x) = x\,\ln x - x + C}\,;$$

c) partielle Integration

$$\int (\ln x)^2\,dx = \int 1 \cdot (\ln x)^2\,dx$$

$$g = (\ln x)^2\,,\quad g' = 2\,\ln x\,\frac{1}{x}(Kettenregel)\,;\;\; f' = 1\,,\quad f = x$$

$$\int 1 \cdot (\ln x)^2\,dx = x\,(\ln x)^2 - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx = x\,(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx$$

$$= x\,(\ln x)^2 - 2(x\,\ln x - x) = x(\ln x - 1)^2 + x + C\,;\qquad \underline{F(x) = x(\ln x - 1)^2 + x + C}\,;$$

4. Bestimmen Sie Stammfunktionen zu den Funktionen $\sin^2 \alpha x$ und $\cos^2 \alpha x$, indem Sie partielle Integration und die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ anwenden.

Lösung

$$\int \sin^2 \alpha x \, dx = \int \sin\ \alpha x\ \sin\ \alpha x \, dx$$

$$g = \sin(\alpha x)\,, \quad g' = \alpha\ \cos(\alpha x)\,; \quad f' = \sin(\alpha x)\,, \quad f = -\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}$$

$$\int \sin\ \alpha x\ \sin\ \alpha x \, dx = \int \sin\ \alpha x \left(-\frac{\cos\ \alpha x}{\alpha}\right)' dx$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \sin\ \alpha x\ \cos\ \alpha x + \int \cos^2 \alpha x \, dx = -\frac{1}{\alpha} \sin\ \alpha x\ \cos\ \alpha x + \int (1 - \sin^2 \alpha x) \, dx$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \sin\ \alpha x\ \cos\ \alpha x + \int \, dx - \int \sin^2 \alpha x) \, dx = \frac{\alpha x - \sin\ \alpha x\ \cos\ \alpha x}{\alpha} - \int \sin^2 \alpha x \, dx$$

$$\Rightarrow\ 2 \int \sin^2 \alpha x \, dx = \frac{\alpha x - \sin\ \alpha x\ \cos\ \alpha x}{\alpha} \qquad \Rightarrow\ F(x) = \frac{\alpha x - \sin\ \alpha x\ \cos\ \alpha x}{2\,\alpha} + C$$

$$\int \cos^2 \alpha x \, dx = \int \cos\ \alpha x\ \cos\ \alpha x \, dx$$

$$g = \cos(\alpha x)\,, \quad g' = -\alpha\ \sin(\alpha x)\,; \quad f' = \cos(\alpha x)\,, \quad f = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$$

$$\int \cos^2 \alpha x \, dx = \int \cos\ \alpha x\ \cos\ \alpha x \, dx = \int \cos\ \alpha x \left(\frac{\sin\ \alpha x}{\alpha}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cos\ \alpha x\ \sin\ \alpha x + \int \sin^2 \alpha x \, dx = \frac{1}{\alpha} \cos\ \alpha x\ \sin\ \alpha x + \int (1 - \cos^2 \alpha x) \, dx$$

$$= \frac{\alpha x + \sin\ \alpha x\ \cos\ \alpha x}{\alpha} - \int \cos^2 \alpha x \, dx$$

$$\Rightarrow\ 2 \int \cos^2 \alpha x \, dx = \frac{\alpha x + \sin\ \alpha x\ \cos\ \alpha x}{\alpha} \qquad \Rightarrow\ F(x) = \frac{\alpha x + \sin\ \alpha x\ \cos\ \alpha x}{2\,\alpha} + C$$

FAKULTATIVE Aufgaben

F1. Berechnen Sie zu der Funktion $f : [0,1] \to [0,1]; \; x \mapsto x$ und der (äquidistanten) Zerlegung $Z_N : x_i = \frac{i}{N}$ (i=0,...,N) $N \in \mathbb{N}$ die **Ober-** und **Untersumme** und die Differenz dieser beiden Summen. (Falls Sie mit allgemeinem N Schwierigkeiten haben, setzen Sie für N zuerst einmal kleine natürliche Zahlen ein.)
Stellen Sie die Summen anhand einer Skizze als Flächeninhalte dar.
Berechnen Sie die jeweiligen Grenzwerte für $N \to \infty$

(5.0 Punkte)

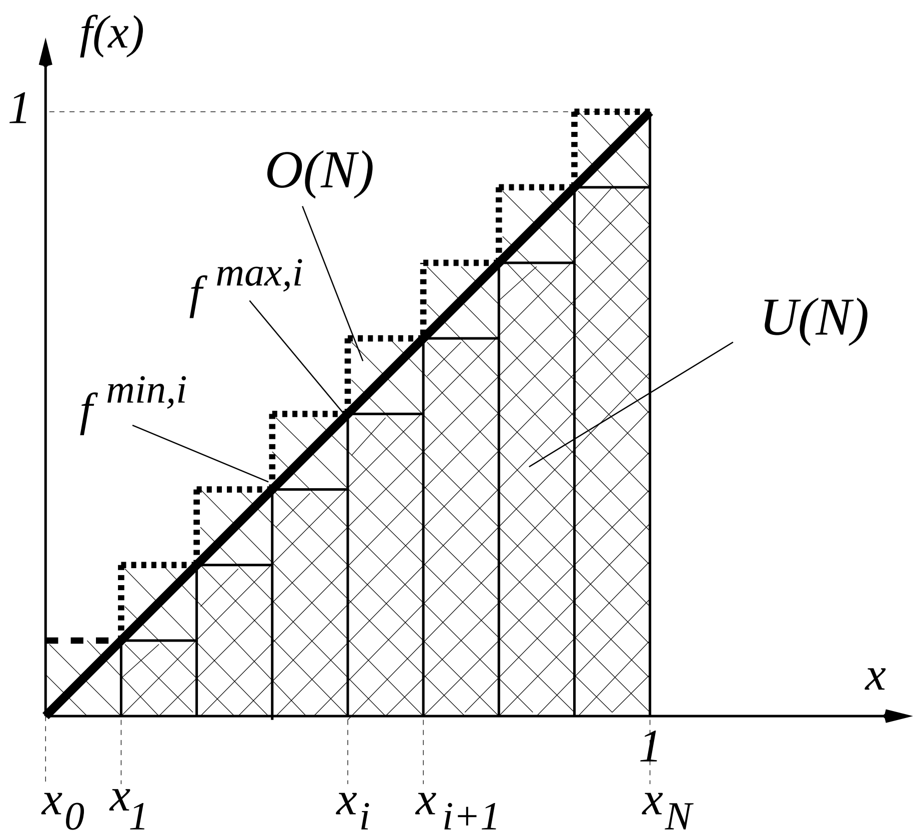
Lösung

$$O(N) = \sum_{i=1}^{N} f^{max\,,i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \frac{1}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} i = \frac{1}{N^2} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N}$$

$$U(N) = \sum_{i=0}^{N-1} f^{min\,,i}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot \frac{1}{N} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{i}{N} \cdot \frac{1}{N} = 0 + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} (i) = \frac{1}{N^2} \frac{(N-1)N}{2} = \frac{N-1}{2N}$$

$$D = O(N) - U(N) = \frac{N+1}{2N} - \frac{N-1}{2N} = \frac{1}{N}$$

$N \to \infty \quad \Rightarrow \quad D \to 0.$



F2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$\int\limits_1^3 x^3 \ln(x^2)\, dx \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\; \sin(2x)\, dx$

Lösung

1)

$$\int\limits_1^3 x^3 \ln(x^2)\, dx = 2 \int\limits_1^3 x^3 \ln x \; dx$$

Partielle Integration:

$$= 2\, \frac{x^4}{4} \;\cdot \ln x \Big|_1^3 - 2 \int\limits_1^3 \frac{x^4}{4}\, \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^4}{2} \;\cdot \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{2} \int\limits_1^3 x^3\, dx$$

$$= \frac{x^4}{2} \;\cdot \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{2}\, \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \mathbf{\frac{81}{2}} \ln \mathbf{3} - \mathbf{10}\,;$$

2)

Partielle Integration und $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{\underline{\cos^5 x\; \sin(2x)\, dx}} = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\; \sin\, x \cos\, x\, dx$

$= 2 \cos^6 x(-\cos\, x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos^5 x\, (-\sin\, x)(-\cos\, x)\, dx$

$= -2 \cos^7 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 6 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{\underline{\cos^5 x\; \sin(2x)\, dx}} \qquad \Rightarrow$

$\Rightarrow \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\; \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{7} \cdot 2\; \cos^7 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{7}(0-1) = \frac{2}{7}$